平成 18 年度

修士論文題目

状況相をもつ格論理学

学生番号 46015

タカオカヨウスケ
高岡洋介

論文の要旨

数理心理学の目標の一つとして，論理体系の構築がある．数理心理学において，論理体系について研究することの意義は，人間の思考の構造がどのようなものであるかを探求することにある．よって，構築され，研究される論理体系は，人間の自然な思考の構造を反映するものでなければならない．

人間を思考機械とみなすと，その構造は代数系として抽象される．代数系とは，集合とその上の算法族の組である．人間の思考の構造を代数系 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ とみなしたとき，集合 A は人間の思考の対象となるものの全体を表し，算法族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は物事の記述の仕方を表す（命題論理における $\wedge$ や $\vee$ 等に当たる）．このような代数系を心言語と呼ぶ．これに対応して，人間の認識の対象となるものの構造も代数系であると考える．つまり，心言語も認識対象世界も，数学的には代数系である．

心言語は，代数系の中でもとくに形式言語と呼ばれるものである．心言語についての研究は，この形式言語上の論理学を行うことに帰着される．具体的に述べると，心言語の代数構造を定めることは文法論であり，認識対象世界の構造を定め，心言語と認識対象世界との関係を調べることは意味論であり，心論理構造（A 上の推論規則に当たる）について調べることは演繹論である．

上で「論理体系は，人間の自然な思考の構造を反映するものでなければならない」と述べたが，論理体系が人間の思考構造に沿っていることを実証するためには，自然言語を観察しなければならない．なぜなら，思考の働きは言語に現れるからである．よって，自然言語現象をよく説明できる論理体系が，理想的なものであるということになる．

数理心理学では，心言語と呼ばれる形式言語を用いて論理体系の研究が行われているが，心言語の設計はまだ完成されていない．現在は，心言語の単純化されたモデルである単相格言語についての研究をもとにして，単相格言語の一般化である（そして，心言語の妥当なモデルであると思われる）格言語について，その構造が模索されている．

この論文では，単相格論理学を発展させた論理体系の構築する．状況相という概念を導入し，状況相をもつ格言語と，状況相をもつ格世界を構成する．状況相をもつ格論理学と単相格論理学を比較し，両者の関係について述べる．また，論理体系の妥当性を調べるためには，恒真関係について多くの情報が必要になる．そこで，恒真関係に関する命題を挙げて，証明をする．最後に，この論文で構築したモデルを用いて，自然言語の現象を説明することを試みる．

目 次

1 序論

数理心理学の目的は，人間の思考の働きと，認識の対象である世界と，思考の現れである言葉の総体を研究することである．その研究の一部は論理学を研究することに帰着される．当面の目標は，**自然言語現象をよく説明する論理体系を模索すること**である．

現時点では，心言語の単純なモデルとして単相格論理学があり，一定の成功を収めている．しかし，心言語の設計はまだ途上にあり，完成されていない．

以下に，単相格論理学の課題の一つとなっている事柄を，例を挙げて示す．

「学生は皆学生である」のような文を私たちは真であるように思う．単相格論理学の理論では，このことをうまく説明することができた．

しかし，「来年学生は皆学生である」や「学生は皆来年学生である」のような文を考えると，「来年」を付け加える場所によって意味が違ってくるように思われる．このことは単相格論理学ではまだ説明できていない．この論文では，これを説明できるようなモデルの構築を目指す．

単相格論理学における認識対象世界である単相格世界の構造を調べることにより，この問題を解決する糸口を探ることができる．単相格世界では，その元を実在と事態とに分けて論じている．実在とは具象・抽象の実在物や概念を表す数学的対象であり，事態とは実在のもつ性質や関係を表す数学的対象である．実在には基本関係と呼ばれる関係が定められており，これは概念の上位・下位関係を表している．「来年学生は皆学生である」のような文を単相格論理学で扱えない理由は，この基本関係が状況によらず一定となっていることにあると考えられる．こうして，基本関係をパラメトライズされた関係の族とするべきであるという着想に至る．パラメーターの集合を T とすると，T の元は時刻を表すと考えたり，状況を表すと考えたりできる．

また，抽象化についても考える必要がある．抽象化とは，事態に対して，実在の集合 S の部分集合を与える操作である．実際の理論では S の部分集合の代わりに $\mathsf{S} \to \mathbb{T}$ の元を考えているが（ただし，$\mathbb{T} = \{1, 0\}$ である)，いずれにせよ，状況により変化しうる構造を有していない．そこで，これを $\mathsf{T} \to (\mathsf{S} \to \mathbb{T})$ とすることにより，状況に依存して変化する概念を表すことができるようにする．

上の説明に現れた集合 T は，基本関係のパラメーターであるが，それ自体を実在物と考えることもできる．そうすると，実在物を表す集合は S と T の二種類が存在することになる．このことを説明するために相の考え方を取り入れる．相とは，実在物のはかり方の違いを表す数学的概念で

ある[1]．S と T は本論では S_σ, S_τ で表すが，それぞれを σ 相の実在，τ 相の実在と呼んで区別する．

以上の考え方を従来の理論と比較したとき，τ 相の存在することが特徴的である．そこで，τ 相をとくに状況相と呼び，このように作られる認識対象世界を，状況相をもつ格世界と呼ぶ．世界の構成に対応して形式言語を構成することができ，これを状況相をもつ格言語と呼ぶ．言語と世界をあわせた論理体系を，状況相をもつ格論理学と呼ぶ．

状況相をもつ格言語は，心言語の妥当なモデルとして，その発展に寄与することが期待される．この研究を通して，心言語の理想的なモデルの構築へ一歩近づくことが期待されている．

2 節では，この論文を読むために必要な知識，用いられる定理を述べる．

3 節では，状況相をもつ格言語と，その認識対象世界である状況相をもつ格世界を構成する．

4 節では，状況相をもつ格論理学と，単相格論理学との関係を述べる．

5 節では，恒真関係に関する様々な命題を述べる．

6 節では，状況相をもつ格論理学が自然言語現象を説明することを，日本語の文を検証することにより示す．

2 準備

2.1 用語

この論文で用いる用語を説明する[2]．

定義 1 集合 A の直積 A^n の部分集合 D から A への写像 α を A 上の算法と呼ぶ $(n = 1, 2, \ldots)$．

定義 2 集合 A とその上の算法族 $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の組み $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を代数系と呼ぶ．

定義 3 f を代数系 A から B への任意の写像とし，これについて以下の定義を設ける．まず，f が各 $\lambda \in \Lambda$ について次の条件 (a) をみたすとき，f を擬写と呼ぶ．

(a) $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$ なら $(fa_1, \ldots, fa_n) \in \mathrm{Dom}\,\beta$ であって

$$f\bigl(\alpha_\lambda(a_1, \ldots, a_n)\bigr) = \beta(fa_1, \ldots, fa_n)$$

が成り立つ．

---

[1] 相を数学的にどのように扱うかは，まだ明確に定まっているわけではない．

[2] 詳しくは参考文献 [1] を参照のこと．

擬写 $f \in A \to B$ がさらに各 $\lambda \in \Lambda$ について次の条件 (b) をみたすとき，f を準写と呼ぶ．

(b) $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n, (fa_1, \ldots, fa_n) \in \mathrm{Dom}\,\beta$ なら

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha$$

が成り立つ．

定義 4 代数系 A と T および準写 $\sigma \in A \to T$ から成る三つ組み (A, T, σ) を型付代数系と呼ぶ．

定義 5 型付代数系 (A, T, σ) と A の部分集合 S が次の二条件をみたすとする．

1. $A = [S]$ （A は S で生成される）
2. (A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in S \to A'$ が保型写像であれば，φ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張される．

このとき，四つ組み (A, T, σ, S) を普遍型付代数系と呼び，S の元をこの普遍型付代数系の素元と呼ぶ（S 自身は素元系と呼ぶ）．また，条件 2 の性質を普遍性と呼ぶ．

定理 1 (普遍型付代数系の存在と一意性定理) S を集合とし，T を代数系とし，$\tau \in S \to T$ とする．このとき，普遍型付代数系 (A, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ なるものが存在する．

こういう普遍型付代数系は次の意味で一意に定まる．すなわち，普遍型付代数系 (A', T, σ', S) も $\sigma'|_S = \tau$ をみたせば，保型同写 $f \in A \to A'$ で $f|_S = \mathrm{id}_S$ なるものが唯一つ存在する．

定義 6 $(A, (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ を代数系とする．

A の二元 a, b に対して $a = \alpha_\lambda(\ldots, b, \ldots)$ なる λ があるとき，b は a に直接に現れると言い，このことを $b \prec a$ で表す．

定義 7 可換単位半群 P 上の全順序関係 $\leq$ が次の二条件 ad, ps をみたすとき，P は $\leq$ に関して量系であると言う．ただし，半群 P の算法と単位元とを $+$ と 0 とで表す．

ad. P の二元 a, b が $a \leq b$ をみたせば，任意の $c \in P$ に対して $a+c \leq b+c$ が成り立つ．

ps. P の任意の元 a に対して $0 \leq a$ が成り立つ（つまり 0 は P の最小元である）．

定義 8 次の四条件をみたす普遍型付代数系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ を形式言語と呼ぶ．

1. 素元系 Prm は二つの部分集合 Con と $\mathrm{Var}(\neq \emptyset)$ によって直和分割されている．
2. T の算法記号系 Λ は，ある集合 Γ と Var の直和 $\Gamma \amalg \mathrm{Var}$ 上の普遍半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{Var})^+$ の部分集合 $\Gamma \amalg \Gamma\mathrm{Var}$ に含まれる（よって Λ の元は，Γ に属すか，Γ の元と Var の元の「積」である）．
3. 任意の $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ は単項算法記号である．
4. T に文型（ぶんがた）という名の特別の元 ϕ が定められている．

集合 Con, Var それぞれの元を定数・変数と呼ぶ．また，Γ を算法記号基と呼び，$\Lambda' = \Lambda \cap \Gamma$ に属す算法記号を不変子と呼び，T の算部分系 $T_{\Lambda'}$ を T' で表す．ただし，算法を制限するだけだから，集合としては T と T' は等しい．他方，$\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ に属す算法記号を可変子と呼び，$\Lambda \cap \Gamma x \neq \emptyset$ なる $x \in \mathrm{Var}$ を修飾変数と呼び，修飾変数の全体を Qvar で表す．従って $\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var} = \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Qvar}$ が成り立つ．

2.2 補助的な命題

この論文で用いる命題を，一般の代数系に関する命題の形で述べる．

命題 1 $(A, T, \sigma, S), (B, U, \tau, S)$ を普遍型付代数系とする．$f \in T \to U$ を同写とする．このとき同写 $F \in A \to B$ で $F|_S = \mathrm{id}_S, \tau F = f\sigma$ なるものが存在する．

証明 $(B, T, f^{-1}\tau)$ は T 型代数系である．A の普遍性により $\mathrm{id}_S \in S \to B$ は保型 T-準写 F に拡張される．F は $f^{-1}\tau F = \sigma$ なる条件をみたす．ゆえに

$$\tau F = ff^{-1}\tau F = f\sigma$$

が成り立つ．

同様にして，$(A, U, f\sigma)$ は U 型代数系なので，B の普遍性により $\mathrm{id}_S \in S \to A$ は保型 U-準写 G に拡張される．G は $f\sigma G = \tau$ なる条件をみたす．

$GF \in A \to A$ は準換で，

$$\begin{aligned} \sigma GF &= f^{-1} f\sigma GF \\ &= f^{-1}\tau F \\ &= \sigma \end{aligned}$$

により，保型写像である．A の素元系 S 上で $GF|_S = \mathrm{id}_S$ が成り立つので，$GF = \mathrm{id}_A$ である．

同様にして，$FG = \mathrm{id}_B \in B \to B$ である．

従って G は F の逆写像で，とくに F は同写である． ■

注意　F は保型写像ではない．

命題 2 $(A, T, \sigma), (B, U, \tau)$ を型付代数系とする．$f \in T \to U$ を準写とする．このとき，擬写 F が $f\sigma = \tau F$ をみたすならば，F は準写である．

証明　A, B, T, U の代数構造を，それぞれ

$$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (t_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

とする．σ, f は準写なので，

$$\begin{aligned}
&(Fa_1, \ldots, Fa_n) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda \\
&\Longrightarrow (\tau Fa_1, \ldots, \tau Fa_n) \in \mathrm{Dom}\,u_\lambda \\
&\Longrightarrow (f\sigma a_1, \ldots, f\sigma a_n) \in \mathrm{Dom}\,u_\lambda \\
&\Longrightarrow (\sigma a_1, \ldots, \sigma a_n) \in \mathrm{Dom}\,t_\lambda \\
&\Longrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに F は準写である． ■

2.3　部分構造から決まる構造

格世界の実在の全体，事態の全体のように，代数系の代数構造が，その部分系の構造から決定される場合がある．そのような場合についての一般理論を述べる．

$P, A_p\ (p \in P)$ を同類の代数系とする．共通の算法記号系を Λ とする．P, A_p の代数構造をそれぞれ $(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (\alpha_\lambda^{(p)})_{\lambda\in\Lambda}$ とする．

本項では，以下 P, A_p に対し，次の条件を仮定する．

- 各 $p \in P$ に対し，定値写像 $c_p \in A_p \to P, a \mapsto p$ は擬写である．
- $p \prec q$ なる $p, q \in P$ に対し，擬写 $\varphi_p^q \in A_p \to A_q$ が与えられている．

条件をみたす P, A_p に対し，$B = \coprod_{p\in P} A_p$ 上の算法 β_λ を次のように定める．

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\beta_\lambda = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in A_{p_i}, \pi_\lambda(p_1, \ldots, p_n) = q,\\ (\varphi^q_{p_1} a_1, \ldots, \varphi^q_{p_n} a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha^{(q)}_\lambda\}\end{aligned}$$

$$\beta_\lambda(a_1, \ldots, a_n) = \alpha^{(q)}_\lambda(\varphi^q_{p_1} a_1, \ldots, \varphi^q_{p_n} a_n)$$

これにより，$(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を代数系とする．

補題 1 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Dom}\,\alpha^{(p)}_\lambda \neq \emptyset$ ならば $p \prec p$ である．

証明 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha^{(p)}_\lambda$ とすると，定値写像 c_p が擬写であることにより $\pi_\lambda(p, \ldots, p) = p$ がいえる．とくに $p \prec p$ である． ■

命題 3 $p \prec q \prec q$ なる任意の $p, q \in P$ に対して $\varphi^q_q \varphi^q_p = \varphi^q_p$ と仮定する．

このとき，$p \prec q$ なる任意の $p, q \in P$ に対して φ^q_p は $(A_p, (\alpha^{(p)}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B, (\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への擬写である．

証明 まず，$p \prec p$ のとき φ^p_p が A_p から B への擬写になることを示す．

以下のことがいえる．

$$\begin{aligned}
&(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha^{(p)}_\lambda \\
&\Longrightarrow (\varphi^p_p a_1, \ldots, \varphi^p_p a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha^{(p)}_\lambda && (\varphi^p_p \text{ は } A_p \text{ 上の擬換}) \\
&\Longleftrightarrow (\varphi^p_p \varphi^p_p a_1, \ldots, \varphi^p_p \varphi^p_p a_n) \in \mathrm{Dom}\,\alpha^{(p)}_\lambda && (\text{仮定により}) \\
&\Longrightarrow (\varphi^p_p a_1, \ldots, \varphi^p_p a_n) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda && (\beta_\lambda \text{ の定義により})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varphi^p_p(\alpha^{(p)}_\lambda(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= \alpha^{(p)}_\lambda(\varphi^p_p a_1, \ldots, \varphi^p_p a_n) && (\varphi^p_p \text{ は擬写}) \\
&= \alpha^{(p)}_\lambda(\varphi^p_p \varphi^p_p a_1, \ldots, \varphi^p_p \varphi^p_p a_n) && (\text{仮定により}) \\
&= \beta(\varphi^p_p a_1, \ldots, \varphi^p_p a_n) && (\beta_\lambda \text{ の定義により})
\end{aligned}$$

よって，φ^p_p は擬写である．

次に，$p \prec q$ のとき φ^q_p が A_p から B への擬写になることを示す．

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Dom}\,\alpha^{(p)}_\lambda = \emptyset$ のとき，示すべきことはない．

そうでないとき，$(a_1,\ldots,a_n)\in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda^{(p)}$ とすると，φ_p^q が擬写なので $(\varphi_p^q a_1,\ldots,\varphi_p^q a_n)\in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda^{(q)}$ である．補題 1 により $q\prec q$ である．

前段で示したように，φ_q^q は A_q から B への擬写である．よって，$\varphi_p^q=\varphi_q^q\varphi_p^q$ は A_p から B への擬写である． ■

系　$p\prec p$ なる任意の $p\in P$ に対して $\varphi_p^p=\mathrm{id}_{A_p}$ を仮定する．

このとき，任意の $p\in P$ に対して id_{A_p} は擬写である．

証明　$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda^{(p)}=\emptyset$ のとき，示すべきことはない．

そうでないとき，補題 1 により $p\prec p$ である．命題と $\varphi_p^p=\mathrm{id}_{A_p}$ とから，id_{A_p} が擬写であることが従う． ■

定理 2　Λ 代数系 C と擬写 $g_p\in A_p\to C\ (p\in P)$ で，$p\prec q$ なる $p,q\in P$ に対して $g_q\varphi_p^q=g_p$ をみたすものがあるとき，擬写 $h\in B\to C$ で各 $p\in P$ に対して $h\,\mathrm{id}_{A_p}=g_p$ をみたすものが一意的に存在する．

各 g_p が準写ならば h も準写である．

証明　C の代数構造を $(\gamma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ とする．

$a\in A_p$ に対し，

$$ha=g_p a$$

と定める．$h\,\mathrm{id}_{A_p}=g_p$ であることと一意性は h の作り方から明らか．

h が擬写であることを示せばよい．

$(a_1,\ldots,a_n)\in\mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ とする．

$\mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ の定義により，$(\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,\varphi_{p_n}^q a_n)\in\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda^{(q)}$ である．ただし，$a_i\in A_{p_i}\ (i=1,\ldots,n)$, $q=\pi_\lambda(p_1,\ldots,p_n)$ である．

$$\begin{aligned}
&(\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,\varphi_{p_n}^q a_n)\in\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda^{(q)}\\
&\Longrightarrow (g_q\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,g_q\varphi_{p_n}^q a_n)\in\mathrm{Dom}\,\gamma_\lambda && (g_q\text{ は擬写}) \\
&\Longleftrightarrow (g_{p_1}a_1,\ldots,g_{p_n}a_n)\in\mathrm{Dom}\,\gamma_\lambda && (\text{仮定により})\\
&\Longleftrightarrow (ha_1,\ldots,ha_n)\in\mathrm{Dom}\,\gamma_\lambda && (h\text{ の定義により})
\end{aligned}\tag{1}$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&h(\beta_\lambda(a_1,\ldots,a_n))\\
&=h(\alpha_\lambda^{(q)}(\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,\varphi_{p_n}^q a_n))\\
&=g_q(\alpha_\lambda^{(q)}(\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,\varphi_{p_n}^q a_n))\\
&=\gamma_\lambda(g_q\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,g_q\varphi_{p_n}^q a_n)\\
&=\gamma_\lambda(g_{p_1}a_1,\ldots,g_{p_n}a_n)\\
&=\gamma_\lambda(ha_1,\ldots,ha_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって h は擬写である．

各 g_p が厳密ならば式 (1) は $\Longleftrightarrow$ となり，h も厳密であることが分かる． ■

定理 3 任意の $p\in P,\lambda\in\Lambda$ に対し，$p\in\operatorname{Im}\pi_\lambda$ ならば算法 $\alpha_\lambda^{(p)}$ は全域的であるとする．

写像 $\sigma\in B\to P$ を，

$$\sigma a=p\ (a\in A_p\ \text{のとき})$$

とすると，このとき (B,P,σ) は型付代数系である．

証明　$(a_1,\ldots,a_n)\in\operatorname{Dom}\beta_\lambda$ とする．

$\operatorname{Dom}\beta_\lambda$ の定義により $\pi_\lambda(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_n)=q$ なる $q\in P$ が存在する．とくに $(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_n)\in\operatorname{Dom}\pi_\lambda$ である．また，

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta_\lambda(a_1,\ldots,a_n))&=\sigma(\alpha_\lambda^{(q)}(\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,\varphi_{p_n}^q a_n))\\
&=q\\
&=\pi_\lambda(\sigma a_1,\ldots,\sigma a_n)
\end{aligned}$$

である．よって σ は擬写である．

σ が厳密であることを示せばよい．

$a_i\in A_{p_i}\ (i=1,\ldots,n)$, $(p_1,\ldots,p_n)\in\operatorname{Dom}\pi_\lambda$ とする．

$\pi_\lambda(p_1,\ldots,p_n)=q$ とすると，仮定により算法 $\alpha_\lambda^{(q)}$ は全域的である．ゆえに $(\varphi_{p_1}^q a_1,\ldots,\varphi_{p_n}^q a_n)\in\operatorname{Dom}\alpha_\lambda^{(q)}$ である．

β_λ の定義により $(a_1,\ldots,a_n)\in\operatorname{Dom}\beta_\lambda$ である． ■

系　定理の仮定に加えて，P が汎代数系であることを仮定する．

このとき B も汎代数系である．

証明　(B,P,σ) が型付代数系であることから従う． ■

3　論理体系の構成

1 節で述べたように，この論文の目的は自然言語現象を説明する論理体系を作ることである．論理学は一般に，文法論，意味論，演繹論に大別されるが，この論文では文法論と意味論を扱う．文法論はすなわち形式言語を構成することであり，意味論はすなわち意味写像を定めることである．

3.1　状況相をもつ格言語の構成

まずは文法論から始める．この項では形式言語を構成する．

定義 9 形式言語 $(\mathsf{A}, \mathsf{T}, \mathrm{tp}_{\mathsf{A}}, \mathrm{Prm})$ を定義する．
　A は，素元系 Prm と，型代数系 T と，素元系の型分割を決めることにより，普遍型付代数系として定まる．
　素元系 Prm は二つの部分集合 Con と Var に直和分割されている．

$$\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \amalg \mathrm{Var}$$

　次に型代数系 T を定義する．T の台集合を定めるために，格集合 K を定める．K は二つの部分集合 K_σ と K_τ に直和分割されている．

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_\sigma \amalg \mathsf{K}_\tau$$

　K_σ の元 π_σ と K_τ の元 π_τ, κ_τ を固定する．K の二項関係 $\lhd$ を

$$\kappa_\tau \not\lhd k \, (k \in \mathsf{K}_\sigma)$$

をみたすように定め，格関係と呼ぶ．K の部分集合 P と K の元 k に対して，P の部分集合 P^k を

$$\mathsf{P}^k = \{l \in \mathsf{P} \mid l \lhd k\}$$

により定める．さらに，K の元 k に対して，$\mathcal{P}\mathsf{K}$ の部分集合 $\mathcal{P}^k\mathsf{K}$ を

$$\mathcal{P}^k\mathsf{K} = \{\mathsf{P} \in \mathcal{P}k \mid \mathsf{P}^k \subseteq \{k\} \subseteq \mathsf{P}\}$$

により定める．
　T の台を次のように定める．

$$\mathsf{T} = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma, \varepsilon_\tau, \delta_\tau\} \amalg \mathcal{P}\mathsf{K}$$

ただし，$\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma, \varepsilon_\tau, \delta_\tau$ は互いに相異なる元とする．

素元系の型分割は，各 $t \in T$ に対して

$$\mathrm{Var}_t = \mathrm{Var} \cap \tau^{-1} t$$

が空集合でないように定める．

限量系を定義する．量系 $\mathbb{P}_\sigma, \mathbb{P}_\tau$ をそれぞれ σ 限量系，τ 限量系とする．$\nu \in \{\sigma, \tau\}$ に対して，$\mathfrak{P}_\nu$ を $\mathbb{P}_\nu$ の有限個の区間の和集合とする．

T の算法を定義する．T の算法記号系 Λ を次により定める．

$$\begin{aligned}\Lambda = {} & \{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \sqcap, \sqcup, \Box, \triangle\} \\ & \cup \{\lambda k \mid \lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{P}_\nu \cup \neg \mathfrak{P}_\nu, k \in K_\nu, \nu \in \{\sigma, \tau\}\} \\ & \cup \{\Omega x \mid x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma} \cup \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau}\}\end{aligned}$$

算法 Ωx を抽象子と呼ぶ．

個々の算法の定義に移る．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$　これらは二項算法である．

$$\mathrm{Dom} \wedge = \mathrm{Dom} \vee = \mathrm{Dom} \Rightarrow = \mathcal{P}K \times \mathcal{P}K$$

$$P \wedge Q = P \vee Q = P \Rightarrow Q = P \cup Q$$

算法 $\Diamond$　単項算法である．

$$\mathrm{Dom} \Diamond = \mathcal{P}K$$

$$P^{\Diamond} = P$$

算法 $\sqcap, \sqcup$　これらは二項算法である．

$$\mathrm{Dom} \sqcap = \mathrm{Dom} \sqcup = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}^2 \cup \{\varepsilon_\tau, \delta_\tau\}^2$$

$$x \sqcap y = x \sqcup y = \begin{cases} \delta_\sigma & x, y \in \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\} \\ \delta_\tau & x, y \in \{\varepsilon_\tau, \delta_\tau\} \end{cases}$$

算法 $\Box$　単項算法である．

$$\mathrm{Dom} \Box = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma, \varepsilon_\tau, \delta_\tau\}$$

$$x^{\Box} = \begin{cases} \delta_\sigma & x = \varepsilon_\sigma, \delta_\sigma \\ \delta_\tau & x = \varepsilon_\tau, \delta_\tau \end{cases}$$

算法 $\triangle$　単項算法である．

$$\mathrm{Dom}\,\triangle = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma, \varepsilon_\tau, \delta_\tau\}$$

$$\varepsilon_\sigma\triangle = \delta_\sigma\triangle = \{\pi_\sigma, \kappa_\tau\}$$

$$\varepsilon_\tau\triangle = \delta_\tau\triangle = \{\pi_\tau\}$$

算法族 $\lambda k(\lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{P}_\nu \cup \neg\mathfrak{P}_\nu, k \in K_\nu, \nu \in \{\sigma, \tau\})$　二項算法である．λ の種類により場合分けして定義する．

(i) $\lambda = \check{o}, k \in K_\nu\ (\nu \in \{\sigma, \tau\})$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\check{o}k = \{\varepsilon_\nu\} \times \mathcal{P}^k K$$

$$\varepsilon_\nu \check{o} k P = P - \{k\}$$

(ii) $\lambda \in \mathfrak{P}_\nu \cup \neg\mathfrak{P}_\nu, k \in K_\nu\ (\nu \in \{\sigma, \tau\})$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\lambda k = \{\varepsilon_\nu, \delta_\nu\} \times \mathcal{P}^k K$$

$$\varepsilon_\nu \lambda k P = \delta_\nu \lambda k P = P - \{k\}$$

算法記号 $\neg[00]k, (0 \to)k$ を，それぞれ $\forall k, \exists k$ とも書く．

算法族 $\Omega x(x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma} \cup \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau})$　単項算法である．

(i) $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \{\emptyset, \{\kappa_\tau\}\}$$

$$\emptyset\Omega x = \{\kappa_\tau\}\Omega x = \delta_\sigma$$

(ii) $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau}$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \{\emptyset\}$$

$$\emptyset\Omega x = \delta_\tau$$

従来の格言語と異なり，抽象子の定義域を $\{\emptyset\}$ に限定しない．

形式言語 A を状況相をもつ格言語と呼ぶ．■

このように定められた A は，確かに定義 8 の意味での形式言語であるから，形式言語について分かっている事実を自由に用いてよい．

3.2　状況相をもつ格世界の構成

前項では文法論を述べた．次に意味論に入る．この項では，状況相をもつ格言語 A にとっての認識対象世界を構成する．

定義 10 状況相をもつ格世界 W を定義する．

T の算法記号系 Λ から抽象子を除いたものを Λ' とし，T の算部分系 $T_{\Lambda'}$ を T' で表す．W を T' 型代数系として定める．

W の基底 S を，空でない集合 S_σ, S_τ の直和で定める．

$$S = S_\sigma \amalg S_\tau$$

S_τ の元 t_0 を固定する．

W の台集合を以下のように定める．

$$W = S_\sigma \cup S_\tau \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})) \cup (S_\tau \to \mathbb{T}) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} ((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})$$

ただし，$P \rightsquigarrow S$ は次で定める集合である．

$$P \rightsquigarrow S = \{\theta \in P \to S \mid \theta K_\nu \subseteq S_\nu \ (\nu \in \{\sigma, \tau\})\}$$

また，$\mathbb{T} = \{1, 0\}$ とする．

W の，T' 型代数系としての型分割を，以下のように定める．

$$\begin{aligned}
W_{\varepsilon_\sigma} &= S_\sigma \\
W_{\delta_\sigma} &= S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}) \\
W_{\varepsilon_\tau} &= S_\tau \\
W_{\delta_\tau} &= S_\tau \to \mathbb{T} \\
W_P &= (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T} && (P \in \mathcal{P}K)
\end{aligned}$$

S_σ の基本関係 $\ni_t \ (t \in S_\tau)$，S_τ の基本関係 $\ni_\tau$ を，反射的な関係とする．

拡張された基本関係を以下のように定義する．

拡張基本関係 $\ni_t \ (t \in S_\tau)$ は，$a \in S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}), b \in S_\sigma, t \in S_\tau$ に対して

$$a \ni_t b \iff (at)b = 1$$

で定める．

拡張基本関係 $\ni_\tau$ は，$a \in S_\tau \to \mathbb{T}, b \in S_\tau$ に対して

$$a \ni_\tau b \iff ab = 1$$

で定める．

$\mathcal{P}S_\nu$ から $\mathbb{P}_\nu$ への写像 $X \mapsto |X|_\nu$ で，次の三法則に従うものがあるとする（$\nu \in \{\sigma, \tau\}$）．

$$X = \emptyset \iff |X|_\nu = 0$$
$$X \subseteq Y \Longrightarrow |X|_\nu \leq |Y|_\nu$$
$$|X \cup Y|_\nu \leq |X|_\nu + |Y|_\nu$$

次に W の算法を定める．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$

$$\mathrm{Dom} \wedge = \mathrm{Dom} \vee = \mathrm{Dom} \Rightarrow = \Big(\bigcup_{P \in \mathcal{P}K} ((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})\Big)^2$$

$f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}, g \in (Q \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ に対して，$f \wedge g \in ((P \cup Q) \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ を以下のように定める．$\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$(f \wedge g)\theta = f(\theta|_P) \wedge g(\theta|_Q)$$

ただし，右辺の $\wedge$ は巾ブール束 $((P \cup Q) \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ の交算法である．

算法 $\vee, \Rightarrow$ については，同様に

$$(f \vee g)\theta = f(\theta|_P) \vee g(\theta|_Q)$$
$$(f \Rightarrow g)\theta = f(\theta|_P) \Rightarrow g(\theta|_Q)$$

で定める．

算法 $\Diamond$

$$\mathrm{Dom}\,\Diamond = \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} ((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})$$

$f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ のとき，$f^\Diamond \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ を次により定める．$\theta \in P \rightsquigarrow S$ に対して，

$$(f^\Diamond)\theta = (f\theta)^\Diamond$$

とする．ただし，右辺の $\Diamond$ は巾ブール束 $(P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ の算法である．

算法 $\sqcap, \sqcup$

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\sqcap = \mathrm{Dom}\sqcup = &\bigl(S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))\bigr)^2 \\ &\cup \bigl(S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})\bigr)^2 \end{aligned}$$

$a, b \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき $a \sqcap b \in S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$ を定める．そのためには，$s \in S_\sigma, t \in S_\tau$ に対して $a \sqcap b \ni_t s$ であることの必要十分条件を定めればよい．

$$a \sqcap b \ni_t s \iff a \ni_t s \text{ かつ } b \ni_t s$$

とする．

$a, b \in S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$ のとき $a \sqcap b \in S_\tau \to \mathbb{T}$ を定める．$t \in S_\tau$ に対して

$$a \sqcap b \ni_\tau t \iff a \ni_\tau t \text{ かつ } b \ni_\tau t$$

と定める．

算法 $\sqcup$ については以下のように定める．

$a, b \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき

$$a \sqcup b \ni_t s \iff a \ni_t s \text{ または } b \ni_t s$$

とする．

$a, b \in S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$ のとき

$$a \sqcup b \ni_\tau t \iff a \ni_\tau t \text{ または } b \ni_\tau t$$

とする．

算法 $\square$

$$\mathrm{Dom}\,\square = S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})) \cup S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$$

$a \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき $a^\square \in S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$ を定める．$s \in S_\sigma, t \in S_\tau$ に対して，

$$a^\square \ni_t s \iff a \ni_t s \text{ でない}$$

とする．

$a \in S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$ のとき $a^\square \in S_\tau \to \mathbb{T}$ を定める．$t \in S_\tau$ に対して，

$$a^\square \ni_\tau t \iff a \ni_\tau t \text{ でない}$$

とする．

算法 $\triangle$

$$\mathrm{Dom}\,\triangle = S_\sigma \cup S_\tau \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})) \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$$

(i) $a \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき，$a\triangle \in (\{\pi_\sigma, \kappa_\tau\} \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ である．その定義は，$\theta \in \{\pi_\sigma, \kappa_\tau\} \rightsquigarrow S$ とすると，

$$(a\triangle)\theta = 1 \Longleftrightarrow a \,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, \theta\pi_\sigma$$

(ii) $a \in S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$ のとき，$a\triangle \in (\{\pi_\tau\} \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ である．その定義は，$\theta \in \{\pi_\tau\} \rightsquigarrow S$ とすると，

$$(a\triangle)\theta = 1 \Longleftrightarrow a \,\exists_\tau\, \theta\pi_\tau$$

算法族 $\lambda k (\lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{P}_\nu \cup \neg\mathfrak{P}_\nu, k \in K_\nu, \nu \in \{\sigma, \tau\})$　λ の種類により場合分けする．

(i) $\lambda = \check{o}, k \in K_\nu \ (\nu \in \{\sigma, \tau\})$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\check{o}k = W_{\varepsilon_\nu} \times \bigcup_{P \in \mathcal{P}^k K} ((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})$$

$a \in W_{\varepsilon_\nu}, f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ に対して，$a\,\check{o}k\,f \in ((P - \{k\}) \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ である．その定義は，$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ とすると，

$$(a\,\check{o}k\,f)\theta = f((k/a)\theta)$$

(ii) $\lambda \in \mathfrak{P}_\nu \cup \neg\mathfrak{P}_\nu, k \in K_\nu \ (\nu \in \{\sigma, \tau\})$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\lambda k = (W_{\varepsilon_\nu} \cup W_{\delta_\nu}) \times \bigcup_{P \in \mathcal{P}^k K} ((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})$$

$a \in W_{\varepsilon_\nu} \cup W_{\delta_\nu}, f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ に対して，$a\,\lambda k\,f \in ((P - \{k\}) \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ である．$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(a\,\lambda k\,f)\theta = 1$ となることの必要十分条件を定めることにより，値が定義される．具体的な定義はさらに場合分けして定める．

(ii-1) $\nu = \sigma, \kappa_\tau \in P$ の場合

$$(a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

$$(a\,\neg\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

(ii-2) $\nu = \sigma, \kappa_\tau \notin P$ の場合

$$(a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_{t_0}\, s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

$$(\mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \iff |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{a}\,\exists_{t_0}\, s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

(ii-3) $\nu = \tau$ の場合

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \iff |\{s \in S_\tau \mid \mathfrak{a}\,\exists_\tau\, s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\tau \in \mathfrak{p}$$

$$(\mathfrak{a}\,\neg\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \iff |\{s \in S_\tau \mid \mathfrak{a}\,\exists_\tau\, s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau \in \mathfrak{p}$$

■

3.3 格世界の Val 乗の T 型代数構造

引き続いて，言語と世界の対応を考える．この項では，状況相をもつ格世界の巾代数系に T 型代数構造を与える．これにより，意味写像を考えることが可能になる．

定義 11 Con から W への写像で型を保つものを A から W への定付値という．すなわち，$\Phi \in \mathrm{Con} \to W$ が定付値であることの必要十分条件は，任意の $t \in T$ に対して

$$\Phi(\mathrm{Con}_t) \subseteq W_t$$

が成り立つことである．

Var から W への写像で型を保つものを A から W への変付値という．すなわち，$\nu \in \mathrm{Var} \to W$ が変付値であることの必要十分条件は，任意の $t \in T$ に対して

$$\nu(\mathrm{Var}_t) \subseteq W_t$$

が成り立つことである．

A から W への変付値の全体を Val_W で表す．省略して Val で表すこともある． ■

W^{Val} は，巾代数系として T' 型代数系である．W^{Val} にさらに抽象子 Ωx に対応する算法を定めることにより，W^{Val} を T 型代数系とすることができる．

(i) $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = (\mathrm{Val} \to W_\emptyset) \cup (\mathrm{Val} \to W_{\{\kappa_\tau\}})$$

$\varphi \in (\mathrm{Val} \to W_\emptyset) \cup (\mathrm{Val} \to W_{\{\kappa_\tau\}})$ に対して $\varphi\Omega x \in \mathrm{Val} \to W_{\delta_\sigma}$ である．

$\varphi \in \mathrm{Val} \to W_\emptyset$ のとき，

$$\mathrm{Val} \to W_\emptyset = \mathrm{Val} \to \mathbb{T}$$

$$\mathrm{Val} \to W_{\delta_\sigma} = \mathrm{Val} \to (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$$

に注意して，$\nu \in \mathrm{Val}, t \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して

$$(((\varphi\Omega x)\nu)t)s = \varphi((x/s)\nu)$$

と定める．

$\varphi \in \mathrm{Val} \to W_{\{\kappa_\tau\}}$ のとき，

$$\mathrm{Val} \to W_{\{\kappa_\tau\}} = \mathrm{Val} \to ((\{\kappa_\tau\} \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})$$

$$\mathrm{Val} \to W_{\delta_\sigma} = \mathrm{Val} \to (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$$

に注意して，$\nu \in \mathrm{Val}, t \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して

$$(((\varphi\Omega x)\nu)t)s = \big(\varphi((x/s)\nu)\big)(\kappa_\tau/t)$$

と定める．

(ii) $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau}$ の場合

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x = \mathrm{Val} \to W_\emptyset$$

$\varphi \in \mathrm{Val} \to W_\emptyset$ に対して $\varphi\Omega x \in \mathrm{Val} \to W_{\delta_\tau}$ である．

$$\mathrm{Val} \to W_\emptyset = \mathrm{Val} \to \mathbb{T}$$

$$\mathrm{Val} \to W_{\delta_\tau} = \mathrm{Val} \to (S_\tau \to \mathbb{T})$$

に注意して，$\nu \in \mathrm{Val}, t \in S_\tau$ に対して

$$((\varphi\Omega x)\nu)t = \varphi((x/t)\nu)$$

と定める．

注意　形式言語の一般理論では，W^{Val} の T 型代数構造は可変子 λ の W での意味 λ_W を定めることにより決定する．状況相をもつ格言語においては，可変子とは抽象子 Ωx のことである．ここでは，$(\Omega x)_W$ を定めることによっても W^{Val} の T 型代数構造を与えられることを述べる．

Ωx の W での意味 $(\Omega x)_W$ は次のようになる．

(i) $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ の場合

$$(\Omega x)_W \in \big((W_{\varepsilon_\sigma} \to W_\emptyset) \cup (W_{\varepsilon_\sigma} \to W_{\{\kappa_\tau\}})\big) \to W_{\delta_\sigma}$$

$f \in W_{\varepsilon_\sigma} \to W_\emptyset$ のときの $(\Omega x)_W f$ の定義．

$$W_{\varepsilon_\sigma} \to W_\emptyset = S_\sigma \to \mathbb{T}$$

$$W_{\delta_\sigma} = S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$$

に注意して，$(\Omega x)_W$ を，f に対して「f を値にもつ定値写像」を対応させる写像とする．すなわち，$t \in S_\tau$ に対して，

$$\big((\Omega x)_W f\big)t = f$$

である．

$f \in W_{\varepsilon_\sigma} \to W_{\{\kappa_\tau\}}$ のときの $(\Omega x)_W f$ の定義．

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon_\sigma} \to W_{\{\kappa_\tau\}} &= S_\sigma \to ((\{\kappa_\tau\} \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}) \\ &= S_\sigma \to (S_\tau \to \mathbb{T}) \end{aligned}$$

と

$$W_{\delta_\sigma} = S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$$

との間には自明な全単射がある．その全単射で $(\Omega x)_W$ を定める．すなわち，$t \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して，

$$\Big(\big((\Omega x)_W f\big)t\Big)s = (fs)t$$

(ii) $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau}$ の場合

$$(\Omega x)_W \in (W_{\varepsilon_\tau} \to W_\emptyset) \to W_{\delta_\tau}$$

である．

$$W_{\varepsilon_\tau} \to W_\emptyset = S_\tau \to \mathbb{T}$$

$$W_{\delta_\tau} = S_\tau \to \mathbb{T}$$

に注意して，$(\Omega x)_W$ を恒等写像とする．すなわち，

$$(\Omega x)_W f = f$$

とする．これは単相格言語の抽象子と同じである． ■

定付値 Φ から意味写像 $\Phi^* \in A \to W^{\mathrm{Val}}$ を構成する方法を述べる．

定付値 Φ に対して，写像 $\Phi' \in \mathrm{Prm} \to W^{\mathrm{Val}}$ を次により定める．

$\nu \in \mathrm{Val}$ に対して，

$$(\Phi' a)\nu = \begin{cases} \Phi a & (a \in \mathrm{Con}) \\ \nu a & (a \in \mathrm{Var}) \end{cases}$$

このように定めた Φ' は保型写像である．A の普遍性により，Φ' は保系準写 Φ^* に拡張される．Φ^* を意味写像と呼ぶ．

4　単相格論理学との関係

状況相をもつ格論理学は，単相格論理学に近い構造をもっている．この節では，状況相をもつ格論理学と単相格論理学がどのように対応しているかについて述べる．

4.1　単相格言語の埋め込み

状況相をもつ格言語 A に対応する単相格言語 A' を構成する．A' の素元系 Prm' は A の素元系 Prm の部分集合である．次に，A' から A への写像 G を構成する．G は次のような意味で自然である．すなわち，G は A' から A のある部分系への全単射準写である．

単相格言語 $(A', U, \mathrm{tp}_{A'}, \mathrm{Prm}')$ を定義する．

単相格言語は，素元系とその型分割，格集合と格関係，限量系を定めることにより決定する．

素元系 Prm' は

$$\mathrm{Prm}' = \mathrm{Prm}_{\varepsilon_\sigma} \cup \mathrm{Prm}_{\delta_\sigma} \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}} \mathrm{Prm}_P$$

とする．素元系の型分割は後述する．

格集合は K_σ，格関係は A の格関係の制限とする．

限量系は $\mathbb{P}_\sigma$ とする．

A' の型代数系を U で表す．すなわち，

$$U = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\} \amalg \mathcal{P}K_\sigma$$

素元系の型分割を以下のように定める．

$\mathrm{Prm}_{\varepsilon_\sigma}$ の元は ε_σ 型．

$\mathrm{Prm}_{\delta_\sigma}$ の元は δ_σ 型．

Prm_P の元は $P - \{\kappa_\tau\}$ 型．（$P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}$）

注意　$\{P \in \mathcal{P}K \mid P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}\}$ の元と $\mathcal{P}K_\sigma$ の元は一対一に対応している．

$$P \mapsto P - \{\kappa_\tau\}$$

■

T の部分系 T_σ を定義する．T_σ の台は，

$$T_\sigma = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\} \amalg \{P \in \mathcal{P}K \mid P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}\}$$

とする．

T_σ の算法記号系は，

$$\begin{aligned}\Lambda_\sigma := &\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow, \sqcap, \sqcup, \Box, \triangle\}\\ &\cup\{\lambda k \mid \lambda \in \{\check{\delta}\} \cup \mathfrak{P}_\sigma \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma, k \in K_\sigma\}\\ &\cup\{\Omega x \mid x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}\}\end{aligned}$$

とする．算法の定義は，Λ_σ に属する算法を T_σ に制限したものとする．

写像 $g \in U \to T_\sigma$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} g\delta_\sigma &= \delta_\sigma \\ g\varepsilon_\sigma &= \varepsilon_\sigma \\ gP &= P \cup \{\kappa_\tau\} \qquad\qquad (P \in \mathcal{P}K_\sigma) \end{aligned} \tag{2}$$

補題 2 $P \in \mathcal{P}K_\sigma, k \in K_\sigma$ に対して，

$$P^k = (P \cup \{\kappa_\tau\})^k$$

が成り立つ．

証明 $P^k = \{l \in P \mid l \lhd k\}, (P \cup \{\kappa_\tau\})^k = \{l \in P \cup \{\kappa_\tau\} \mid l \lhd k\}$ である．

$P^k \subseteq (P \cup \{\kappa_\tau\})^k$ は明らか．

また，$l \in P \cup \{\kappa_\tau\}, l \lhd k$ とすると，$\kappa_\tau \not\lhd k$ なので $l \in P$ である．ゆえに $(P \cup \{\kappa_\tau\})^k \subseteq P^k$ が成り立つ． ■

補題 3 $P \in \mathcal{P}K_\sigma, k \in K_\sigma$ に対して，$P \in \mathcal{P}^k K_\sigma$ と $gP \in \mathcal{P}^k K$ は同値である．

証明 次の計算により，同値であることがわかる．

$$\begin{aligned} &P \in \mathcal{P}^k K_\sigma \\ \iff &P^k \subseteq \{k\} \subseteq P \\ \iff &(P \cup \{\kappa_\tau\})^k \subseteq \{k\} \subseteq P \cup \{\kappa_\tau\} \qquad (\text{補題 2 により}) \\ \iff &(gP)^k \subseteq \{k\} \subseteq gP \\ \iff &gP \in \mathcal{P}^k K \end{aligned}$$

■

命題 4 式 (2) で定めた g は同写である．

証明　写像 $h \in T_\sigma \to U$ を以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
h\delta_\sigma &= \delta_\sigma \\
h\varepsilon_\sigma &= \varepsilon_\sigma \\
hP &= P - \{\kappa_\tau\} \qquad\qquad (P \in \mathcal{P}K)
\end{aligned}
$$

h は g の逆写像である．とくに g は全単射である．

T_σ の算法記号系 Λ_σ は，U の算法記号系に等しい．

g が準写であることを，個々の算法について確かめる．この証明では，算法記号 λ に対応する U, T_σ の算法をそれぞれ $\lambda_U, \lambda_{T_\sigma}$ で表すことにする．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&(P, Q) \in \mathrm{Dom} \wedge_U \\
&\iff P, Q \in \mathcal{P}K_\sigma \\
&\iff gP, gQ \in \{P \in \mathcal{P}K \mid P \cap K_\sigma = \{\kappa_\tau\}\} \\
&\iff (gP, gQ) \in \mathrm{Dom} \wedge_{T_\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(P \wedge_U Q) &= g(P \cup Q) \\
&= P \cup Q \cup \{\kappa_\tau\} \\
&= (P \cup \{\kappa_\tau\}) \cup (Q \cup \{\kappa_\tau\}) \\
&= gP \cup gQ \\
&= gP \wedge_{T_\sigma} gQ
\end{aligned}
$$

$\vee, \Rightarrow$ についても同様である．

算法 $\Diamond$

$$
\begin{aligned}
&P \in \mathrm{Dom} \Diamond_U \\
&\iff P \in \mathcal{P}K_\sigma \\
&\iff gP \in \{P \in \mathcal{P}K \mid P \cap K_\sigma = \{\kappa_\tau\}\} \\
&\iff gP \in \mathrm{Dom} \Diamond_{T_\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
g(P^{\Diamond_U}) = gP = (gP)^{\Diamond_{T_\sigma}}
$$

算法 $\sqcap, \sqcup$

$$\mathrm{Dom} \sqcap_{\mathsf{U}} = \mathrm{Dom} \sqcap_{\mathsf{T}_\sigma} = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}^2$$

$$\begin{aligned} g(x \sqcap_{\mathsf{U}} y) &= g\delta_\sigma \\ &= \delta_\sigma \\ &= gx \sqcap_{\mathsf{T}_\sigma} gy \end{aligned}$$

$\sqcup$ についても同様である.

算法 $\square$

$$\mathrm{Dom} \square_{\mathsf{U}} = \mathrm{Dom} \square_{\mathsf{T}_\sigma} = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}$$

$$\begin{aligned} g(x^{\square_{\mathsf{U}}}) &= g\delta_\sigma \\ &= \delta_\sigma \\ &= (gx)^{\square_{\mathsf{T}_\sigma}} \end{aligned}$$

算法 $\triangle$

$$\mathrm{Dom} \triangle_{\mathsf{U}} = \mathrm{Dom} \triangle_{\mathsf{T}_\sigma} = \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}$$

である.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma \triangle_{\mathsf{U}} = \delta_\sigma \triangle_{\mathsf{U}} = \{\pi_\sigma\} \\ \varepsilon_\sigma \triangle_{\mathsf{T}_\sigma} = \delta_\sigma \triangle_{\mathsf{T}_\sigma} = \{\pi_\sigma, \kappa_\tau\} \end{aligned}$$

なので, $x \in \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}$ に対して,

$$\begin{aligned} g(x \triangle_{\mathsf{U}}) &= g\{\pi_\sigma\} \\ &= \{\pi_\sigma, \kappa_\tau\} \\ &= (gx) \triangle_{\mathsf{T}_\sigma} \end{aligned}$$

である.

算法族 $\lambda k(\lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{P}_\sigma \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma, k \in K_\sigma)$　λ の種類により場合分けする．

(i) $\lambda = \check{o}$ の場合

$$
\begin{aligned}
&(x, P) \in \mathrm{Dom}\, \check{o}k_U \\
&\iff x = \varepsilon_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K_\sigma \\
&\iff gx = \varepsilon_\sigma, gP \in \mathcal{P}^k K \\
&\iff (gx, gP) \in \mathrm{Dom}\, \check{o}k_{T_\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\varepsilon_\sigma\, \check{o}k_U\, P) &= g(P - \{k\}) \\
&= (P - \{k\}) \cup \{\kappa_\tau\} \\
&= (P \cup \{\kappa_\tau\}) - \{k\} \\
&= gP - \{k\} \\
&= g\varepsilon_\sigma\, \check{o}k_{T_\sigma}\, gP
\end{aligned}
$$

(ii) $\lambda \in \mathfrak{P}_\sigma \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma$ の場合

$$
\begin{aligned}
&(x, P) \in \mathrm{Dom}\, \lambda k_U \\
&\iff x \in \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}, P \in \mathcal{P}^k K_\sigma \\
&\iff gx \in \{\varepsilon_\sigma, \delta_\sigma\}, gP \in \mathcal{P}^k K \\
&\iff (gx, gP) \in \mathrm{Dom}\, \lambda k_{T_\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x\, \check{o}k_U\, P) &= g(P - \{k\}) \\
&= (P - \{k\}) \cup \{\kappa_\tau\} \\
&= (P \cup \{\kappa_\tau\}) - \{k\} \\
&= gP - \{k\} \\
&= gx\, \check{o}k_{T_\sigma}\, gP
\end{aligned}
$$

算法族 $\Omega x(x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma})$

$$
\begin{aligned}
&P \in \mathrm{Dom}\, \Omega x_U \\
&\iff P = \emptyset \\
&\iff gP = \{\kappa_\tau\} \\
&\iff gP \in \mathrm{Dom}\, \Omega x_{T_\sigma}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\emptyset \Omega x_U) &= g\delta_\sigma \\
&= \delta_\sigma \\
&= \{\kappa_\tau\}\Omega x_{T_\sigma} \\
&= (g\emptyset)\Omega x_{T_\sigma}
\end{aligned}
$$

以上により g が準写であることがいえる． ■

A の部分系 A_σ を定義する．

Prm' の Λ_σ 算包を A_σ とする．

$$A_\sigma = [\mathrm{Prm}']_{\Lambda_\sigma}$$

A_σ は普遍型付代数系である．

命題 1 により，同写 $G \in A' \to A_\sigma$ で $G|_{\mathrm{Prm}'} = \mathrm{id}_{\mathrm{Prm}'}$ なるものが存在する．

4.2 状況相をもつ格世界の部分系から単相格世界への準写

Λ_σ から抽象子を除いたもの（これを Λ'_σ とする．）を算法とする T_σ の部分系を T'_σ とする．

状況相をもつ格世界 W の部分系 W_σ を定義する．

W_σ の台は，

$$W_\sigma = S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}} ((P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T})$$

とする．

W_σ の代数構造は，Λ'_σ に属する算法を W_σ に制限したものとする．

このとき W_σ は T'_σ 型代数系となる．

次に，各 $t \in S_\tau$ に対して，単相格世界 W_t を定義する．

単相格世界は，基底，格集合，基本関係，測度を定めることにより決まる．W_t の基底を S_σ，格集合を K_σ，基本関係を $\ni_t$，測度を $|\cdot|_\sigma$ とする．

具体的には，W_t の台集合は

$$W_t = S_\sigma \cup (S_\sigma \to \mathbb{T}) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K_\sigma} ((P \to S_\sigma) \to \mathbb{T})$$

となる．台集合は $t \in S_\tau$ によらずに決まる．

基本関係が t に依存するので，W_t の代数構造は t により異なる．例えば，W_t における算法 $\mathfrak{p}k$ は以下のように定義される．

$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\sigma, k \in K_\sigma, a \in S_\sigma, f \in (P \to S_\sigma) \to \mathbb{T}, P \in \mathcal{P}^k K_\sigma, \theta \in (P - \{k\}) \to S_\sigma$ に対して，

$$(a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \iff |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_t s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

となる．

補題 4 (1) $\theta \in P \rightsquigarrow S, P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}$ のとき，

$$\theta|_{P-\{\kappa_\tau\}} \in (P - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma$$

である．

(2)$\theta' \in Q \to S_\sigma, Q \in \mathcal{P}K_\sigma, t \in S_\tau$ のとき，

$$(\kappa_\tau/t)\theta' \in (Q \cup \{\kappa_\tau\}) \rightsquigarrow S$$

である．

証明　(1) 示すべきことは，

$$\text{任意の } k \in P - \{\kappa_\tau\} \text{ に対して } \theta k \in S_\sigma$$

である．

$k \in P - \{\kappa_\tau\}$ とする．$P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}, K = K_\sigma \amalg K_\tau$ により $k \in K_\sigma$ である．$P \rightsquigarrow S$ の定義から $\theta k \in S_\sigma$ が従う．

(2) 示すべきことは，

$$\big((\kappa_\tau/t)\theta'\big)\big((Q \cup \{\kappa_\tau\}) \cap K_\nu\big) \subseteq S_\nu \; (\nu \in \{\sigma, \tau\})$$

である．

$k \in (Q \cup \{\kappa_\tau\}) \cap K_\sigma$ とする．このとき $k \in Q$ なので，

$$\big((\kappa_\tau/t)\theta'\big)k = \theta' k \in S_\sigma$$

である．

$k \in (Q \cup \{\kappa_\tau\}) \cap K_\tau$ とする．$Q \in \mathcal{P}K_\sigma$ なので $k \notin Q$．よって $k = \kappa_\tau$ である．ゆえに $\big((\kappa_\tau/t)\theta'\big)k = t \in S_\tau$ である．■

W_σ から W_t への写像 F_t を定義する．後で示すように，この F_t は準写である．

(i) $a \in S_\sigma$ のとき

$$F_t a = a$$

(ii) $a \in S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$ のとき

$$F_t a = at \in S_\sigma \to \mathbb{T}$$

(iii) $f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}\,(P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\})$ のとき，$F_t f \in \big((P - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma\big) \to \mathbb{T}$ を次のように定める．

$\theta \in (P - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma$ に対して，

$$(F_t f)\theta = f((\kappa_\tau/t)\theta)$$

補題 5 $a \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき，拡張された基本関係について

$$a \mathrel{\exists_t} s \iff F_t a \mathrel{\exists_t} s$$

が成り立つ．

左辺の $\exists_t$ は W における拡張基本関係，右辺の $\exists_t$ は W_t における拡張基本関係である．

証明 $a \in S_\sigma$ のときは，F_t の定義により $F_t a = a$ だから，$a \mathrel{\exists_t} s \iff F_t a \mathrel{\exists_t} s$ が成り立つ．

$a \in S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$ のときは，以下の計算により分かる．

$$\begin{aligned}
& a \mathrel{\exists_t} s \\
& \iff (at)s = 1 \\
& \iff (F_t a)s = 1 \\
& \iff F_t a \mathrel{\exists_t} s
\end{aligned}$$

■

命題 5 上で定めた F_t は準写である．

証明 F_t が擬写であることがわかれば，命題 2 により F_t は準写であることがいえる．

個々の算法について，擬写であることを確かめる．

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ $f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}, g \in (Q \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ に対して，$F_t(f \wedge g) = F_t f \wedge F_t g$ を示す．$\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$\begin{aligned}
\big(F_t(f \wedge g)\big)\theta &= (f \wedge g)((\kappa_\tau/t)\theta) \\
&= f\big(((\kappa_\tau/t)\theta)|_{P \cup \{\kappa_\tau\}}\big) \wedge g\big(((\kappa_\tau/t)\theta)|_{Q \cup \{\kappa_\tau\}}\big) \\
&= (F_t f)(\theta|_P) \wedge (F_t g)(\theta|_Q) \\
&= (F_t f \wedge F_t g)\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ．θ は任意なので，$F_t(f \wedge g) = F_t f \wedge F_t g$ が成り立つ．
　$\vee, \Rightarrow$ についても同様のことがいえる．

算法 $\Diamond$　$f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ とする．$F_t(f^{\Diamond}) = (F_t f)^{\Diamond}$ を示す．$\theta \in P \rightsquigarrow S$ に対して，

$$\begin{aligned}\big(F_t(f^{\Diamond})\big)\theta &= (f^{\Diamond})((\kappa_\tau/t)\theta) \\ &= \big(f((\kappa_\tau/t)\theta)\big)^{\Diamond} \\ &= \big((F_t f)\theta\big)^{\Diamond} \\ &= \big((F_t f)^{\Diamond}\big)\theta\end{aligned}$$

が成り立つ．θ は任意なので，$F_t(f^{\Diamond}) = (F_t f)^{\Diamond}$ が成り立つ．

算法 $\sqcap, \sqcup$　$a, b \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき，$F_t(a \sqcap b) = F_t a \sqcap F_t b$ を示す．補題 5 により，$s \in S_\sigma$ に対して，

$$\begin{aligned}&F_t(a \sqcap b) \ni_t s \\ &\Longleftrightarrow a \sqcap b \ni_t s \\ &\Longleftrightarrow a \ni_t s \text{ かつ } b \ni_t s \\ &\Longleftrightarrow F_t a \ni_t s \text{ かつ } F_t b \ni_t s \\ &\Longleftrightarrow F_t a \sqcap F_t b \ni_t s\end{aligned}$$

が成り立つ．従って $F_t(a \sqcap b) = F_t a \sqcap F_t b$ である．
　$\sqcup$ についても同様のことがいえる．

算法 $\Box$　$a \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき，$F_t(a^{\Diamond}) = (F_t a)^{\Diamond}$ を示す．補題 5 により，$s \in S_\sigma$ に対して，

$$\begin{aligned}&F_t(a^{\Diamond}) \ni_t s \\ &\Longleftrightarrow a^{\Diamond} \ni_t s \\ &\Longleftrightarrow a \ni_t s \text{ でない} \\ &\Longleftrightarrow F_t a \ni_t s \text{ でない} \\ &\Longleftrightarrow (F_t a)^{\Diamond} \ni_t s\end{aligned}$$

が成り立つ．s は任意なので，$F_t(a^{\Diamond}) = (F_t a)^{\Diamond}$ が成り立つ．

算法 $\triangle$　$a \in S_\sigma \cup (S_\sigma \to \mathbb{T})$ のとき，$F_t(a\triangle) \in (\{\pi_\sigma\} \to S_\sigma) \to \mathbb{T}$ である．$s \in S_\sigma$ に対して，

$$(F_t(a\triangle))(\pi_\sigma/s) = (a\triangle)\big((\kappa_\tau/t)(\pi_\sigma/s)\big)$$

である．

$$(a\triangle)\big((\kappa_\tau/t)(\pi_\sigma/s)\big) = 1 \iff a \exists_t s$$

であり，一方，

$$((F_t a)\triangle)(\pi_\sigma/s) = 1 \iff F_t a \exists_t s$$

である．

s は任意なので，$F_t(a\triangle) = (F_t a)\triangle$ が成り立つ．

算法族 $\lambda k(\lambda \in \{\check{o}\} \cup \mathfrak{P}_\sigma \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma, k \in K_\sigma)$　λ の種類により場合分けして示す．

(i) $\lambda = \check{o}$ の場合

$a \in S_\sigma, f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}, P \in \mathcal{P}^k K_\sigma, \theta \in ((P - \{k\}) \to S) \to \mathbb{T}$ に対して，

$$\begin{aligned}\big(F_t(a\,\check{o}k\,f)\big)\theta &= (a\,\check{o}k\,f)((\kappa_\tau/t)\theta)\\ &= f((k/a)(\kappa_\tau/t)\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big((F_t a)\,\check{o}k\,(F_t f)\big)\theta &= F_t f((k/F_t a)\theta)\\ &= F_t f((k/a)\theta)\\ &= f((\kappa_\tau/t)(k/a)\theta)\end{aligned}$$

θ は任意なので，$F_t(a\,\check{o}k\,f) = (F_t a)\,\check{o}k\,(F_t f)$ が成り立つ．

(ii) $\lambda \in \mathfrak{P}_\sigma \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma$ の場合

$\lambda = \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_\sigma$ とする．$a \in S_\sigma \cup S_\sigma \to \mathbb{T}, f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}, P \in \mathcal{P}^k K_\sigma, \theta \in ((P - \{k\}) \to S) \to \mathbb{T}$ に対して，

$$\big(F_t(a\,\mathfrak{p}k\,f)\big)\theta = (a\,\mathfrak{p}k\,f)((\kappa_\tau/t)\theta)$$

$$\begin{aligned}&(a\,\mathfrak{p}k\,f)((\kappa_\tau/t)\theta) = 1\\ \iff& |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{((\kappa_\tau/t)\theta)\kappa_\tau} s, f((k/s)(\kappa/\tau)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}\\ \iff& |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_t s, f((k/s)(\kappa/\tau)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\big((F_t a)\,\mathfrak{p}k\,(F_t f)\big)\theta = 1 \\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid F_t a \,\exists_t\, s, F_t f((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid F_t a \,\exists_t\, s, f((\kappa_\tau/t)(k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}
\end{aligned}
$$

θ は任意なので，$F_t(a\,\mathfrak{p}k\,f) = (F_t a)\,\mathfrak{p}k\,(F_t f)$ が成り立つ．
$\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\sigma$ のときも同様である．

以上により，F_t が擬写であることがいえた． ■

4.3 事態間の恒不等式の対応

定義 12 W の事態の列全体を $(W_{\mathcal{P}K})^*$ で表す．$(W_{\mathcal{P}K})^*$ 上の関係 $\lessdot$ を定義する．

$f_1, \ldots, f_m$ と $g_1, \ldots, g_n$ を事態の列とする．f_i の枠を P_i，g_j の枠を Q_j とする $(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n)$．このとき，

$$
\begin{aligned}
&f_1, \ldots, f_m \lessdot g_1, \ldots, g_n \\
&\iff \text{任意の } \theta \in K \rightsquigarrow S \text{ に対して} \\
&\inf\{f_1(\theta|_{P_1}), \ldots, f_m(\theta|_{P_m})\} \leq \sup\{g_1(\theta|_{Q_1}), \ldots, g_n(\theta|_{Q_n})\}
\end{aligned}
$$

と定める．

$f_1, \ldots, f_m \lessdot g_1, \ldots, g_n$ を事態間の恒不等式と呼ぶ． ■

命題 6 $\lessdot$ はブール関係である．

証明 $W_P = (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ は巾ブール束である．とくに $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 汎代数系である．$\mathcal{P}K$ は T の部分系として $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ 汎代数系である．

以下，この証明では算法記号系を $\{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}$ とする．

定値写像 $c_P \in W_P \to \mathcal{P}K, w \mapsto P$ は擬写である．

$P, Q \in \mathcal{P}K$ に対し，$P \prec Q \iff P \subset Q$ である．$P \subset Q$ なる $P, Q \in \mathcal{P}K$ に対し，擬写 $\varphi_P^Q \in W_P \to W_Q$ を

$$(\varphi_P^Q f)\theta = f(\theta|_P)\ (f \in W_P, \theta \in Q \rightsquigarrow S)$$

により定める．定理 3 の系により，$(W_{\mathcal{P}K}, \mathcal{P}K)$ に汎型付代数系の代数構造 $(\beta_\lambda)_{\lambda \in \{\wedge, \vee, \Diamond, \Rightarrow\}}$ がある．これが W の部分系としての構造に等しいことを示す．

$f \in W_P, g \in W_Q$ に対し，$\beta_\wedge(f,g) \in W_{P\cup Q}$ である．$\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(\beta_\wedge(f,g)) &= \big((\varphi_P^{P\cup Q} f) \wedge (\varphi_Q^{P\cup Q} g)\big)\theta && (\beta_\wedge \text{ の定義}) \\
&= (\varphi_P^{P\cup Q} f)\theta \wedge (\varphi_Q^{P\cup Q} g)\theta && (\text{巾代数系の性質}) \\
&= f(\theta|_P) \wedge g(\theta|_Q) && (\varphi_P^{P\cup Q}, \varphi_Q^{P\cup Q} \text{ の定義})
\end{aligned}
$$

である．これは W の算法 $\wedge$ の定義に等しい．

同様にして，算法 $\beta_\vee, \beta_\Rightarrow, \beta_\Diamond$ は算法 $\vee, \Rightarrow, \Diamond$ に等しい．

定理 2 を $W_K, \varphi_P^K\,(P \in \mathcal{P}K)$ に適用すると，準写 $\phi \in W_{\mathcal{P}K} \to W_K$ が構成される．

ϕ は $W_{\mathcal{P}K}$ の W_K 上のブール表現であり，$\lessdot$ はブール関係 $\preccurlyeq_\phi$ に等しいから，$\lessdot$ はブール関係である． ■

命題 7 $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n$ を W_σ の事態とする．このとき，

$$f_1, \ldots, f_m \lessdot g_1, \ldots, g_n$$

と

$$\text{任意の } t \in S_\tau \text{ に対して } F_t f_1, \ldots, F_t f_m \lessdot F_t g_1, \ldots, F_t g_n$$

は同値である．

証明 まず $m = n = 1$ の場合について示す．f_1 を f，g_1 を g と書く．

$f \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}, g \in (Q \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ とする．W_σ の定義により，$P \cap K_\tau = Q \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}$ である．

$f \lessdot g$ を仮定する．任意の $t \in S_\tau$ に対して，

$$F_t f \in ((P - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma) \to \mathbb{T}$$

$$F_t g \in ((Q - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma) \to \mathbb{T}$$

である．

任意の $\theta \in ((P \cup Q) - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma$ をとる．

$$
\begin{aligned}
(F_t f)(\theta|_{P-\{\kappa_\tau\}}) &= f((\kappa_\tau/t)\theta|_{P-\{\kappa_\tau\}}) \\
&= f\big(((\kappa_\tau/t)\theta)|_P\big)
\end{aligned}
$$

同様にして，

$$(F_t g)(\theta|_{Q-\{\kappa_\tau\}}) = g\big(((\kappa_\tau/t)\theta)|_Q\big)$$

$(\kappa_\tau/t)\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S$ である．仮定 $f \lessdot g$ により，

$$f\big(((\kappa_\tau/t)\theta)|_P\big) \le g\big(((\kappa_\tau/t)\theta)|_Q\big)$$

である．ゆえに

$$(F_t f)(\theta|_{P-\{\kappa_\tau\}}) \leq (F_t g)(\theta|_{Q-\{\kappa_\tau\}})$$

である．

$\theta \in ((P \cup Q) - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma$ は任意なので，

$$F_t f \lessdot F_t g$$

が成り立つ．

逆に，任意の $t \in S_\tau$ に対して $F_t f \lessdot F_t g$ を仮定する．任意の $\theta \in (P \cup Q) \rightsquigarrow S$ に対して $f(\theta|_P) \leq g(\theta|_Q)$ を示せばよい．

$\theta' \in ((P \cup Q) - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma$ を θ の制限として定める．すなわち，$k \in (P \cup Q) - \{\kappa_\tau\}$ に対して，$\theta' k = \theta k$.

$\theta\kappa_\tau = t$ とすると，$F_t f \lessdot F_t g$ により

$$(F_t f)(\theta'|_{P-\{\kappa_\tau\}}) \leq (F_t g)(\theta'|_{Q-\{\kappa_\tau\}}) \tag{3}$$

である．

F_t の定義により

$$(F_t f)(\theta'|_{P-\{\kappa_\tau\}}) = f((\kappa_\tau/t)\theta'|_{P-\{\kappa_\tau\}})$$

である．$(\kappa_\tau/t)\theta'|_{P-\{\kappa_\tau\}} = \theta|_P$ なので，

$$(F_t f)(\theta'|_{P-\{\kappa_\tau\}}) = f(\theta|_P)$$

である．同様にして，

$$(F_t g)(\theta'|_{Q-\{\kappa_\tau\}}) = g(\theta|_Q)$$

である．これらと (3) とから

$$f(\theta|_P) \leq g(\theta|_Q)$$

が従う．

$m = 0, n = 1$ の場合，$m = 1, n = 0$ の場合は，より容易に示される．

$m, n \geq 1$ の場合は，以下の計算によって示される．

$$\begin{aligned}
& f_1, \ldots, f_m \lessdot g_1, \ldots, g_n \\
& \iff f_1 \wedge \cdots \wedge f_m \lessdot g_1 \vee \ldots \vee g_n \\
& \iff \forall t \in S_\tau \; F_t(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) \lessdot F_t(g_1 \vee \ldots \vee g_n) \\
& \iff \forall t \in S_\tau \; F_t f_1 \wedge \cdots \wedge F_t f_m \lessdot F_t g_1 \vee \ldots \vee F_t g_n \\
& \iff \forall t \in S_\tau \; F_t f_1, \ldots, F_t f_m \lessdot F_t g_1, \ldots, F_t g_n
\end{aligned}$$

■

4.4 定付値の対応

A から W への定付値 Φ に対して，A' から W_t への定付値 Φ_t を定める方法を述べる．型分割

$$\mathrm{Prm}' = \mathrm{Prm}_{\varepsilon_\sigma} \cup \mathrm{Prm}_{\delta_\sigma} \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}} \mathrm{Prm}_P$$

が直和分割であることに注目して，Φ_t を以下のように定める．

$s \in \mathrm{Prm}_{\varepsilon_\sigma}$ のとき

$$\Phi_t s = \Phi s$$

$s \in \mathrm{Prm}_{\delta_\sigma}$ のとき

$$\Phi_t s = (\Phi s)t$$

$s \in \mathrm{Prm}_P\ (P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\})$ のとき

s は A' の元としては $P - \{\kappa_\tau\}$ 型である．$\Phi_t s \in \big((P - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma\big) \to \mathbb{T}$ を定義するには，各 $\theta \in (P - \{\kappa_\tau\}) \to S_\sigma$ に対する値を定めればよい．

$$(\Phi_t s)\theta = (\Phi s)((\kappa_\tau/t)\theta)$$

と定める．

注意　同様にして，A から W への変付値 v に対して，A' から W_t への変付値 v' を定めることができる．v' を v の制限（詳しくは t における制限）と呼ぶ．

後で示すように，$v \mapsto v'$ は Val_W から Val_{W_t} への全射である．すなわち，A' から W_t への変付値 w に対して，A から W への変付値 $\overline{w}$ で $\overline{w}' = w$ であるようなものが存在する．

4.5 意味写像の対応

A から W への定付値 Φ，A' から W_t への定付値 Φ_t から，それぞれ意味写像 Φ^*, Φ_t^* が定まる．これらの間の関係を示す．

W_σ が W の部分系であることから，$W_\sigma^{\mathrm{Val}_W}$ は W^{Val_W} の部分系であることがわかる．

補題 6 $\Phi^* GA' \subseteq W_\sigma^{\mathrm{Val}_W}$ である．

証明　$a' \in A'$ とする．G の定義により，Ga' は ε_σ 型，δ_σ 型，P 型（$P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}$）のいずれかである．

Φ^* は保型準写なので, $\Phi^* Ga'$ も ε_σ 型, δ_σ 型, P 型($P \in \mathcal{P}K, P \cap K_\tau = \{\kappa_\tau\}$) のいずれかである．■

命題 8 任意の $\nu \in \mathrm{Val}_{W_t}$ に対して $\overline{\nu} \in \mathrm{Val}_W$ を対応させる写像で以下の条件をみたすものが存在する．

$x \in \mathrm{Var}'_{\varepsilon_\sigma}$ に対して

$$\overline{\nu}x = \nu x$$

$x \in \mathrm{Var}'_{\delta_\sigma}$ に対して

$$(\overline{\nu}x)t = \nu x$$

$x \in \mathrm{Var}'_P, P \in \mathcal{P}K_\sigma, \theta \in P \to S_\sigma$ に対して

$$(\overline{\nu}x)((\kappa_\tau/t)\theta) = (\nu x)\theta$$

このような写像を t 拡張と呼ぶ．

証明　$w \in \mathrm{Val}_W$ を固定する．

各変数 x に対して値 $\overline{\nu}x$ を定めることにより，$\overline{\nu}$ を定める．

$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ に対しては，$\overline{\nu}x = \nu x$ と定める．

$x \in \mathrm{Var}_{\delta_\sigma}$ に対して，$\overline{\nu}x \in S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$ を次のように定める．

$$(\overline{\nu}x)u = \begin{cases} \nu x & (u = t) \\ (wx)u & (u \neq t) \end{cases}$$

$x \in \mathrm{Var}_P$ に対して，$\overline{\nu}x \in (P \rightsquigarrow S) \to \mathbb{T}$ を次のように定める．

$$(\overline{\nu}x)\theta = \begin{cases} (\nu x)(\theta|_{P-\{\kappa_\tau\}}) & (\theta\kappa_\tau = t) \\ (wx)\theta & (\theta\kappa_\tau \neq t) \end{cases}$$

$\mathrm{Var} - \mathrm{Var}'$ に関しては，$\overline{\nu}x = wx$ と定める．

このようにして定めた $\overline{\nu}$ は与えられた条件をみたす． ■

以下，t 拡張というときは，上の証明中の仕方で構成されたものを考えている．

命題 9 $t \in S_\tau$ とする．t 拡張 $\nu \mapsto \overline{\nu}$ が定まっているとする．

準写 $F_t \in W_\sigma \to W_t$ から写像 $F_t^* \in W_\sigma^{\mathrm{Val}_W} \to W_t^{\mathrm{Val}_{W_t}}$ を以下のように定める．

$b \in W_\sigma^{\mathrm{Val}_W}, \nu \in \mathrm{Val}_{W_t}$ に対して

$$(F_t^* b)\nu = F_t(b\overline{\nu}) \in W_t$$

このとき，F_t^* は準写である．

証明　λ が不変子のとき

$$
\begin{aligned}
&\Big(F_t^*\big(\beta_\lambda(b_1,\dots,b_n)\big)\Big)\nu \\
&= F_t\big(\beta_\lambda(b_1,\dots,b_n)\overline{\nu}\big) && (F_t^* \text{ の定義}) \\
&= F_t\big(\omega_\lambda(b_1\overline{\nu},\dots,b_n\overline{\nu})\big) && (\text{射影は準写}) \\
&= \omega'_\lambda(F_t(b_1\overline{\nu}),\dots,F_t(b_n\overline{\nu})) && (F_t \text{ は準写}) \\
&= \omega'_\lambda((F_t^*b_1)\nu,\dots,(F_t^*b_n)\nu) && (F_t^* \text{ の定義}) \\
&= \beta'_\lambda(F_t^*b_1,\dots,F_t^*b_n)\nu && (\text{射影は準写})
\end{aligned}
$$

λ が抽象子のとき，すなわち，$\lambda = \Omega x$ ($x \in \mathrm{Var}'_{\varepsilon_\sigma}$) のとき
$F_t^*(b\Omega x)$ と $(F_t^*b)\Omega x$ が等しいことを示す.
$\nu \in \mathrm{Val}_{W_t}, s \in S_\sigma$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\Big(\big(F_t^*(b\Omega x)\big)\nu\Big)s &= \Big(F_t\big((b\Omega x)\overline{\nu}\big)\Big)s \\
&= \Big(\big((b\Omega x)\overline{\nu}\big)t\Big)s \\
&= f((x/s)\overline{\nu})(\kappa_\tau/t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big(\big((F_t^*b)\Omega x\big)\nu\Big)s &= (F_t^*f)((x/s)\nu) \\
&= F_t\big(f\overline{(x/s)\nu}\big) \\
&= \big(f\overline{(x/s)\nu}\big)(\kappa_\tau/t)
\end{aligned}
$$

$(x/s)\overline{\nu} = \overline{(x/s)\nu}$ により，両者は等しい. ■

命題 10 $a' \in A'$ に対して $F_t^*\big(\Phi^*(Ga')\big)$ を対応させる写像は A' から $W_t^{\mathrm{Val}_{W_t}}$ への保型準写である.

証明　三つの保型準写 G, Φ^*, F_t^* の合成は保型準写である. ■

命題 11 任意の $a' \in A'$ に対して

$$F_t^*\big(\Phi^*(Ga')\big) = \Phi_t^* a'$$

が成り立つ.

証明　$a' \mapsto F_t^*\bigl(\Phi^*(Ga')\bigr), a' \mapsto \Phi_t^* a'$ はともに準写なので，A' の素元系 Prm' 上で両者が一致することを示せばよい．

$s \in \mathrm{Prm}'$ に対しては，$Gs = s$ だから，

$$F_t^*\bigl(\Phi^*(Gs)\bigr) = F_t^*(\Phi^* s)$$

である．

(i) $s \in \mathrm{Prm}_{\varepsilon_\sigma}$ のとき

$v \in \mathrm{Val}_{W_t}$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl(F_t^*(\Phi^* s)\bigr)v &= F_t\bigl((\Phi^* s)\overline{v}\bigr) \\
&= (\Phi^* s)\overline{v} && (F_t \text{ の定義により}) \\
&= \begin{cases} \Phi s & (s \in \mathrm{Con}) \\ \overline{v} s & (s \in \mathrm{Var}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Phi_t s & (s \in \mathrm{Con}) \\ v s & (s \in \mathrm{Var}) \end{cases} \\
&= (\Phi_t^* s) v
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$F_t^*\bigl(\Phi^*(Gs)\bigr) = \Phi_t^* s$$

が成り立つ．

(ii) $s \in \mathrm{Prm}_{\delta_\sigma}$ のとき

$v \in \mathrm{Val}_{W_t}$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl(F_t^*(\Phi^* s)\bigr)v &= F_t\bigl((\Phi^* s)\overline{v}\bigr) \\
&= \bigl((\Phi^* s)\overline{v}\bigr)t && (F_t \text{ の定義により}) \\
&= \begin{cases} (\Phi s)t & (s \in \mathrm{Con}) \\ (\overline{v} s)t & (s \in \mathrm{Var}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Phi_t s & (s \in \mathrm{Con}) \\ v s & (s \in \mathrm{Var}) \end{cases} \\
&= (\Phi_t^* s) v
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$F_t^*\bigl(\Phi^*(Gs)\bigr) = \Phi_t^* s$$

が成り立つ．

(iii) $s \in \mathrm{Prm}_P$ $(P \in \mathcal{P}K_\sigma)$ のとき
$\nu \in \mathrm{Val}_{W_t}$ に対して

$$\bigl(F_t^*(\Phi^* s)\bigr)\nu = F_t((\Phi^* s)\overline{\nu})$$

$\theta \in P \to S_\sigma$ に対して

$$\begin{aligned}
\Bigl(F_t\bigl((\Phi^* s)\overline{\nu}\bigr)\Bigr)\theta &= \bigl((\Phi^* s)\overline{\nu}\bigr)((\kappa_\tau/t)\theta) \\
&= \begin{cases} (\Phi s)((\kappa_\tau/t)\theta) & (s \in \mathrm{Con}) \\ (\overline{\nu} s)((\kappa_\tau/t)\theta) & (s \in \mathrm{Var}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\Phi_t s)\theta & (s \in \mathrm{Con}) \\ (\nu s)\theta & (s \in \mathrm{Var}) \end{cases} \\
&= \bigl((\Phi_t^* s)\nu\bigr)\theta
\end{aligned}$$

θ は任意なので，

$$F_t\bigl((\Phi^* s)\overline{\nu}\bigr) = (\Phi_t^* s)\nu$$

ゆえに，

$$F_t^*\bigl(\Phi^*(Gs)\bigr) = \Phi_t^* s$$

が成り立つ． ■

F_t^* の定め方は t 拡張の仕方に依存するが，次の命題は t 拡張の任意性によらない．

命題 12 $\nu \in \mathrm{Val}_W$ の制限[3] を $\nu' \in \mathrm{Val}_{W_t}$ とする．このとき任意の $a' \in A'$ に対して

$$F_t\Bigl(\bigl(\Phi^*(Ga')\bigr)\nu\Bigr) = (\Phi_t^* a')\nu'$$

が成り立つ．

証明　t 拡張として，命題 8 の証明中で w を ν としたものをとる．そうすると，ν' の t 拡張は ν に等しい．
F_t^* の定義により

$$\Bigl(F_t^*\bigl(\Phi^*(Ga')\bigr)\Bigr)\nu' = F_t\Bigl(\bigl(\Phi^*(Ga')\bigr)\nu\Bigr)$$

である．
一方，命題 11 により

$$\Bigl(F_t^*\bigl(\Phi^*(Ga')\bigr)\Bigr)\nu' = (\Phi_t^* a')\nu'$$

である． ■

[3] ここで「制限」は p.33 の注意に記した意味である．

4.6 Φ 真関係の対応

定義 13 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ を A の用元とする．

$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ と定付値 Φ，変付値 ν が

$$(\Phi^* a_1)\nu, \dots, (\Phi^* a_m)\nu \lessdot (\Phi^* b_1)\nu, \dots, (\Phi^* b_n)\nu$$

をみたすことを，

$$a_1, \dots, a_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1, \dots, b_n$$

で表す．

$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ と定付値 Φ が，任意の変付値 ν に対して

$$a_1, \dots, a_m \preccurlyeq_{\Phi,\nu} b_1, \dots, b_n$$

をみたすことを，

$$a_1, \dots, a_m \preccurlyeq_{\Phi} b_1, \dots, b_n$$

で表す．$\preccurlyeq_\Phi$ を Φ 真関係と呼ぶ．

$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ が，任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して

$$a_1, \dots, a_m \preccurlyeq_{\Phi} b_1, \dots, b_n$$

をみたすことを，

$$a_1, \dots, a_m \preccurlyeq b_1, \dots, b_n$$

で表す．$\preccurlyeq$ を恒真関係と呼ぶ．

用元 a が $\preccurlyeq a$ をみたすとき，a は恒真であるといい，a を恒真元と呼ぶ．

$a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ が

$$a_1, \dots, a_m \preccurlyeq b_1, \dots, b_n \text{ かつ } a_1, \dots, a_m \succcurlyeq b_1, \dots, b_n$$

をみたすことを，

$$a_1, \dots, a_m \asymp b_1, \dots, b_n$$

で表す． ■

命題 13 $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ を A' の用元とする．このとき

$$\begin{aligned} &Ga_1, \dots, Ga_m \preccurlyeq_\Phi Gb_1, \dots, Gb_n \\ &\iff \text{任意の } t \in S_\tau \text{ に対して } a_1, \dots, a_m \preccurlyeq_{\Phi_t} b_1, \dots, b_n \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明　簡単のために $m = n = 1$ の場合を示す．命題 7 により

$$
\begin{aligned}
&Ga \preccurlyeq_{\Phi} Gb \\
&\iff \text{任意の } v \in \mathrm{Val}_W \text{ に対して } \big(\Phi^*(Ga)\big)v \lessdot \big(\Phi^*(Gb)\big)v \\
&\iff \text{任意の } v \in \mathrm{Val}_W, t \in S_\tau \text{ に対して} \\
&F_t\Big(\big(\Phi^*(Ga)\big)v\Big) \lessdot F_t\Big(\big(\Phi^*(Gb)\big)v\Big)
\end{aligned}
$$

である．一方，

$$
\begin{aligned}
&a \preccurlyeq_{\Phi_t} b \\
&\iff \text{任意の } w \in \mathrm{Val}_{W_t} \text{ に対して } (\Phi_t^* a)w \lessdot (\Phi_t^* b)w
\end{aligned}
$$

である．

$v \in \mathrm{Val}_W$ の制限[4] を $v' \in \mathrm{Val}_{W_t}$ とすると，命題 12 により

$$F_t\Big(\big(\Phi^*(Ga)\big)v\Big) = (\Phi_t^* a)v'$$

が成り立つ．v が Val_W 全体を動くとき，v の制限は Val_{W_t} 全体を動くから，

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } v \in \mathrm{Val}_W \text{ に対して } F_t\Big(\big(\Phi^*(Ga)\big)v\Big) \lessdot F_t\Big(\big(\Phi^*(Gb)\big)v\Big) \\
&\iff \text{任意の } w \in \mathrm{Val}_{W_t} \text{ に対して } (\Phi_t^* a)w \lessdot (\Phi_t^* b)w
\end{aligned}
$$

である．■

5　恒真関係

状況相をもつ格言語の恒真関係に関する様々な命題を述べる．

なお，この節では，次の定理を用いる[5]．

定理 4 (意味写像定理) A を形式言語とする．

$a \in A, v, v' \in \mathrm{Val}$ であって任意の $x \in \mathrm{Fvar}^a$ に対して $vx = v'x$ が成り立つとする．このとき，$(\Phi^* a)v = (\Phi^* a)v'$ が成り立つ．

[4] p.33 の注意に記した意味での制限である．

[5] 証明は参考文献 [1] または [2] を参照のこと．

5.1 事態間の恒不等式

事態間の恒不等式に関する命題を示す．これらは，恒真関係についての命題を証明するために利用される．

定義 14 実在について，いくつかの用語を定める．

$s \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ のとき，s を σ 相の実在という．

$s \in S_\tau \cup (S_\tau \to \mathbb{T})$ のとき，s を τ 相の実在という．

$a \in S_\sigma$ が個実在であるとは，任意の $t \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して

$$a \exists_t s \iff a = s$$

が成り立つことをいう．

$a \in S_\sigma \cup (S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}))$ が不変な実在であるとは，任意の $t_1, t_2 \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して

$$a \exists_{t_1} s \iff a \exists_{t_2} s$$

が成り立つことをいう． ■

命題 14 個実在は不変な実在である．

証明 a を個実在とする．任意の $t_1, t_2 \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して，

$$a \exists_{t_1} s \iff a = s \iff a \exists_{t_2} s$$

が成り立つ． ■

5.1.1 σ 相について

σ 相の実在に関する命題を示す．

命題 15 $a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P, p \in \mathbb{P}_\sigma$ のとき，$p \leq q$ なる任意の $q \in \mathbb{P}_\sigma$ に対し $a\,p k\,f, a\,\overline{q} k\,f \lessdot$ が成り立ち，$p > q$ なる任意の $q \in \mathbb{P}_\sigma$ に対し $a\,p k\,f \lessdot a\,\overline{q} k\,f$ が成り立つ．

証明 前半を示す．$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(a\,p k\,f)\theta = 1$ とする．

$\kappa_\tau \in P$ のとき，

$$\begin{aligned}
&(a\,p k\,f)\theta = 1 \\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f\big((k/s)\theta\big) = 1\}|_\sigma = p \notin (q \to)
\end{aligned}$$

ゆえに $(a\,\overline{q} k\,f)\theta = 0$ である．

$\kappa_\tau \notin P$ のときは，上の式の $a \ni_{\theta\kappa_\tau} s$ を $a \ni_{t_0} s$ で置き換えれば同様の議論が成り立つ．

後半を示す．$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して，$\kappa_\tau \in P$ のとき，

$$\begin{aligned}&(a\,\underline{p}k\,f)\theta = 1\\ &\Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \ni_{\theta\kappa_\tau} s, f\big((k/s)\theta\big) = 1\}|_\sigma = p \in (q \to)\end{aligned}$$

ゆえに $(a\,\overline{q}k\,f)\theta = 1$ である．

$\kappa_\tau \notin P$ のときは，上の式の $a \ni_{\theta\kappa_\tau} s$ を $a \ni_{t_0} s$ で置き換えれば同様の議論が成り立つ．■

命題 16 $a, b \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき次のことが成り立つ．ただし，第一式においては $b \in W_{\varepsilon_\sigma}$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}_\sigma, \kappa_\tau \in P$ とする．

$$\begin{gathered}b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle,\ b\,\check{o}k\,f \lessdot a \ni k\,f\\ b\,\underline{p}\pi_\sigma\,a\triangle,\ b\,\overline{p+q}k\,f \lessdot a\,\overline{q}k\,f\\ b\,\overline{p+q}\pi_\sigma\,a\triangle,\ b\,\underline{p}k\,f \lessdot a\,\overline{q}k\,f\end{gathered}$$

証明　第一式の証明

$\theta \in (P - \{k\} \cup \{\kappa_\tau\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}} = 1, (b\,\check{o}k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 1$ を仮定する．

$$(b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}} = 1 \Longleftrightarrow a \ni_{\theta\kappa_\tau} b$$

$$(b\,\check{o}k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 1 \Longleftrightarrow f((k/b)\theta|_{P-\{k\}}) = 1$$

ゆえに $\{s \in S_\sigma \mid a \ni_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = 1\} \neq \emptyset$ が成り立つ．すなわち $(a \ni k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 1$ が成り立つ．

第二式の証明

$\theta \in (P - \{k\} \cup \{\kappa_\tau\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(b\,\underline{p}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}} = 1, (a\,\overline{q}k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 0$ を仮定する．

$$(b\,\underline{p}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}} = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid b \ni_{\theta\kappa_\tau} s, a \not\ni_{\theta\kappa_\tau} s\}|_\sigma \leq p$$

$$(a\,\overline{q}k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 0 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \ni_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = 1\}|_\sigma \leq q$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}&|\{s \in S_\sigma \mid b \ni_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = 1\}|\\ &\leq |\{s \in S_\sigma \mid b \ni_{\theta\kappa_\tau} s, a \not\ni_{\theta\kappa_\tau} s\}|_\sigma + |\{s \in S_\sigma \mid a \ni_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = 1\}|_\sigma\\ &\leq p + q\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち $(b\,\overline{p+q}k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=0$ である．
第三式も同様に示される． ■

命題 17 $a,b\in W_{\varepsilon_\sigma}\cup W_{\delta_\sigma}, k\in K_\sigma, P\in\mathcal{P}^kK, f\in W_P$ のとき次のことが成り立つ．ただし，第一式においては $b\in W_{\varepsilon_\sigma}$ とし，第二式と第三式においては $p,q\in\mathbb{P}_\sigma,\kappa_\tau\in P$ とする．

$$\begin{aligned} b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle,\ a\,\forall k\,f &\lessdot b\,\check{o}k\,f\\ b\,\underline{p}\pi_\sigma\,a\triangle,\ a\,\underline{q}k\,f &\lessdot b\,\underline{p+q}k\,f\\ b\,\overline{p+q}\pi_\sigma\,a\triangle,\ a\,\underline{q}k\,f &\lessdot b\,\overline{p}k\,f \end{aligned}$$

証明　第一式の証明
$\theta\in(P-\{k\}\cup\{\kappa_\tau\})\rightsquigarrow S$ に対して $(b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}}=1,(a\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=1$ を仮定する．

$$(b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}}=1\Longleftrightarrow a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,b$$

$$\begin{aligned}&(a\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=1\\ &\Longleftrightarrow\text{「}s\in S_\sigma, a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s\ \text{ならば}f((k/s)\theta|_{P-\{k\}})=1\text{」}\end{aligned}$$

なので $f((k/b)\theta|_{P-\{k\}})=1$ が成り立つ．すなわち $(b\,\check{o}k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=1$ が成り立つ．
第二式の証明
$\theta\in(P-\{k\}\cup\{\kappa_\tau\})\rightsquigarrow S$ に対して $(b\,\underline{p}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}}=1,(a\,\underline{q}k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=0$ を仮定する．

$$(b\,\underline{p}\pi_\sigma\,a\triangle)\theta|_{\{\kappa_\tau\}}=1\Longleftrightarrow|\{s\in S_\sigma\mid b\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s, a\nexists_{\theta\kappa_\tau}s\}|_\sigma\le p$$

$$(a\,\underline{q}k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=1\Longleftrightarrow|\{s\in S_\sigma\mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}})=0\}|_\sigma\le q$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}&|\{s\in S_\sigma\mid b\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}})=0\}|\\ &\le|\{s\in S_\sigma\mid b\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s, a\nexists_{\theta\kappa_\tau}s\}|_\sigma+|\{s\in S_\sigma\mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s, f((k/s)\theta|_{P-\{k\}})=0\}|_\sigma\\ &\le p+q\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち $(b\,\underline{p+q}k\,f)\theta|_{P-\{k\}}=0$ である．
第三式も同様に示される． ■

命題 **18** $\mathfrak{a} \in W_{\varepsilon_\sigma}, k \in K, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき，

$$\mathfrak{a}\,\forall k\, f \leq \mathfrak{a}\,\check{o} k\, f \leq \mathfrak{a}\,\exists k\, f$$

が成り立つ．

証明　$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して，$\kappa_\tau \in P$ のとき，

$$(\mathfrak{a}\,\forall k\, f)\theta = 1 \Longleftrightarrow \text{「}s \in S_\sigma, \mathfrak{a} \exists_{\theta\kappa_\tau} s \text{ ならば} f((k/s)\theta) = 1\text{」}$$

$$(\mathfrak{a}\,\exists k\, f)\theta = 1 \Longleftrightarrow \text{「}\mathfrak{a} \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 1 \text{ なる } s \in S_\sigma \text{ が存在する」}$$

$$(\mathfrak{a}\,\check{o} k\, f)\theta = f((k/\mathfrak{a})\theta)$$

である．基本関係が反射的なので

$$(\mathfrak{a}\,\forall k\, f)\theta = 1 \Longrightarrow (\mathfrak{a}\,\check{o} k\, f)\theta = 1$$
$$(\mathfrak{a}\,\check{o} k\, f)\theta = 1 \Longrightarrow (\mathfrak{a}\,\exists k\, f)\theta = 1$$

が成り立つ．

$\kappa_\tau \notin P$ のときは，$\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ に置き換えた議論が成り立つ．■

命題 **19** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P, p, q \in \mathbb{P}_\sigma$ のとき，次のことが成り立つ．

$$(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b})\,\underline{p+q} k\, f \gtrdot \mathfrak{a}\,\underline{p} k\, f,\ \mathfrak{b}\,\underline{q} k\, f$$
$$(\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b})\,\overline{p+q} k\, f \lessdot \mathfrak{a}\,\overline{p} k\, f,\ \mathfrak{b}\,\overline{q} k\, f$$

証明　第一式の証明

$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(\mathfrak{a}\,\underline{p} k\, f)\theta = 1, (\mathfrak{b}\,\underline{q} k\, f)\theta = 1$ を仮定する．$\kappa_\tau \in P$ のとき，

$$(\mathfrak{a}\,\underline{p} k\, f)\theta = 1 \Longrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{a} \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma \leq p$$

$$(\mathfrak{b}\,\underline{p} k\, f)\theta = 1 \Longrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{b} \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma \leq q$$

なので，

$$\begin{aligned}
&|\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b} \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma \\
&\leq |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{a} \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma + |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{b} \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\sigma \\
&\leq p + q
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って $\big((\mathfrak{a} \sqcup \mathfrak{b})\,\underline{p+q} k\, f\big)\theta = 1$ が成り立つ．

$\kappa_\tau \notin P$ のときは $\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ に置き換えた議論が成り立つ．
第二式は第一式から導かれる．第一式により

$$(a \sqcup b)\, \underline{p+q}k\, f^\Diamond \geqslant a\, \underline{p}k\, f^\Diamond,\ b\, \underline{q}k\, f^\Diamond$$

が成り立つ．$a\, \underline{p}k\, f^\Diamond = (a\, \overline{p}k\, f)^\Diamond$ などにより

$$\big((a \sqcup b)\, \overline{p+q}k\, f\big)^\Diamond \geqslant (a\, \overline{p}k\, f)^\Diamond,\ (b\, \overline{q}k\, f)^\Diamond$$

が成り立つ．$\lessdot$ はブール関係なので第二式が成り立つ． ■

命題 20 $a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \lambda$ は $\breve{o}$ または $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間，$k \in K_\sigma, P, Q \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P, g \in W_Q$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \breve{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

$$f \lessdot g \Longrightarrow a\lambda k\, f \lessdot a\lambda k\, g$$

証明 $f \lessdot g$ を仮定する．
$\lambda = \breve{o}$ のとき
$\theta \in \big((P \cup Q) - \{k\}\big) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$\begin{aligned}(a\, \breve{o}k\, f)\theta = 1 &\Longleftrightarrow f((k/a)\theta) = 1\\ &\Longrightarrow g((k/a)\theta) = 1\\ &\Longleftrightarrow (a\, \breve{o}k\, g)\theta = 1\end{aligned}$$

が成り立つ．
λ が $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間のとき
λ を $\mathfrak{p}$ で表す．$\theta \in \big((P \cup Q) - \{k\}\big) \rightsquigarrow S$ に対して，$(a\, \mathfrak{p}k\, f)\theta = 1$ を仮定する．$\kappa_\tau \in P$ ならば

$$(a\, \mathfrak{p}k\, f)\theta = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

である．$f((k/s)\theta) = 1 \Longrightarrow g((k/s)\theta) = 1$ で，$\mathfrak{P}_\sigma$ が上方区間なので

$$|\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{\theta\kappa_\tau} s, g((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

が成り立つ．すなわち $(a\, \mathfrak{p}k\, g)\theta = 1$ である．
$\kappa_\tau \notin P$ の場合は $\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ で置き換えた議論が成り立つ．
λ が $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間のときも同様にして示される． ■

命題 21 $a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, b \in W_{\varepsilon_\sigma}, \lambda \in \{\breve{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma \cup \mathfrak{P}_\sigma, k, l \in K_\sigma, k \neq l, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，

$$a\lambda k\, (b\, \breve{o}l\, f) = b\, \breve{o}l\, (a\lambda k\, f)$$

が成り立つ．ただし，$\lambda = \breve{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

証明　$\theta \in (P-\{k,l\}) \rightsquigarrow S$ に対して，$\bigl(a\,\lambda k\,(b\,\breve{o} l\, f)\bigr)\theta = \bigl(b\,\breve{o} l\,(a\,\lambda k\, f)\bigr)\theta$ を示せばよい．

$\lambda = \breve{o}$ のとき

次の計算により分かる．

$$
\begin{aligned}
\bigl(a\,\lambda k\,(b\,\breve{o} l\, f)\bigr)\theta &= (b\,\breve{o} l\, f)\bigl((k/a)\theta\bigr) \\
&= f\bigl((l/b)(k/a)\theta\bigr) \\
&= f\bigl((k/a)(l/b)\theta\bigr) \\
&= (a\,\breve{o} k\, f)\bigl((l/b)\theta\bigr) \\
&= \bigl(b\,\lambda l\,(a\,\breve{o} k\, f)\bigr)\theta
\end{aligned}
$$

$\lambda \in \mathfrak{P}_\sigma$ のとき

λ を $\mathfrak{p}$ で表す．$\kappa_\tau \in P$ ならば

$$
\begin{aligned}
&\bigl(a\,\mathfrak{p} k\,(b\,\breve{o} l\, f)\bigr)\theta = 1 \\
\iff& |\{s \in S_\sigma \mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, s, (b\,\breve{o} l\, f)((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
\iff& |\{s \in S_\sigma \mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, s, f((l/b)(k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
\iff& |\{s \in S_\sigma \mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, s, f((k/s)(l/b)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
\iff& (a\,\mathfrak{p} k\, f)((l/b)\theta) = 1 \\
\iff& \bigl(b\,\breve{o} l\,(a\,\mathfrak{p} k\, f)\bigr)\theta = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

$\kappa_\tau \notin P$ の場合は，$\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ に置き換えた議論が成り立つ．

$\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\sigma$ のときも同様である．　■

命題 22　$a, b \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \lambda$ は $\breve{o}$ または $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間，$k, l \in K_\sigma, k \neq l, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \breve{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

$$
\begin{aligned}
a\,\lambda k\,(b\,\forall l\, f) &\leq b\,\forall l\,(a\,\lambda k\, f) \\
a\,\lambda k\,(b\,\exists l\, f) &\geq b\,\exists l\,(a\,\lambda k\, f)
\end{aligned}
$$

証明　$\lambda = \breve{o}$ の場合は命題 21 から従う．

λ が $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間の場合に第一式を示す．

$\kappa_\tau \in P$ のとき，$b\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\, s$ なる $s \in S_\sigma$ に対して

$$
b\,\forall l\, f \leq s\,\breve{o} l\, f
$$

が成り立つ．命題 20，命題 21 により

$$\begin{aligned} a\,\lambda k(b\,\forall l\,f) &\leq a\,\lambda k(s\,\breve{o}l\,f) \\ &= s\,\breve{o}l(a\,\lambda k\,f) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} a\,\lambda k(b\,\forall l\,f) &\leq \inf\{s\,\breve{o}l(a\,\lambda k\,f) \mid b\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s \in S_\sigma\} \\ &= b\,\forall l\,(a\,\lambda k\,f) \end{aligned}$$

である．

$\kappa_\tau \notin P$ の場合は，$\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ に置き換えた議論が成り立つ．

第二式も同様である． ■

命題 23 $a \in W_{\varepsilon_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} &\lessdot (1_\sigma\,\forall k\,f) \Rightarrow f \\ &\lessdot (1_\sigma\,\forall k\,f) \Rightarrow (a\,\breve{o}k\,f) \end{aligned}$$

ただし，1_σ は $W_{\delta_\sigma} = S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T})$ の最大元である．

証明 第一式の証明

任意の $\theta \in P$ に対して，

$$\big((1_\sigma\,\forall k\,f) \Rightarrow f\big)\theta = (1_\sigma\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}} \Rightarrow f\theta$$

である．

$$\begin{aligned} &(1_\sigma\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 1 \\ &\Longleftrightarrow s \in S_\sigma \text{ ならば } f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = 1 \\ &\Longrightarrow f\theta = 1 \end{aligned}$$

なので，$(1_\sigma\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}} \Rightarrow f\theta$ が成り立つ．

第二式の証明

任意の $\theta \in (P - \{k\})$ に対して $\big((1_\sigma\,\forall k\,f) \Rightarrow (a\,\breve{o}k\,f)\big)\theta = 1$ を示せばよい．

$$\begin{aligned} &(1_\sigma\,\forall k\,f)\theta = 1 \\ &\Longleftrightarrow s \in S_\sigma \text{ ならば } f((k/s)\theta) = 1 \\ &\Longleftrightarrow s \in S_\sigma \text{ ならば } (s\,\breve{o}k\,f)\theta = 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$(1_\sigma\,\forall k\,f)\theta = 1$ ならば $(a\,\breve{o}k\,f)\theta = 1$ である． ■

命題 24 $k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき，次の三つは同等である．

$$\begin{aligned}
&\lessdot 1_\sigma \forall k\, f\\
&\text{任意の } s \in S_\sigma \text{ に対して } \lessdot s\, \check{o} k\, f\\
&\lessdot f
\end{aligned}$$

証明 $\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$\begin{aligned}
&(1_\sigma \forall k\, f)\theta = 1\\
&\iff \text{任意の } s \in S_\sigma \text{ に対して } f((k/s)\theta) = 1\\
&\iff \text{任意の } s \in S_\sigma \text{ に対して } (s\, \check{o} k\, f)\theta = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}
&\text{任意の } \theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S, s \in S_\sigma \text{ に対して } f((k/s)\theta) = 1\\
&\iff \text{任意の } \theta' \in P \rightsquigarrow S \text{ に対して } f\theta' = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

5.1.2 τ 相について

5.1.1 目で示した命題は σ 相についてのものである．これらに並行することが τ 相についてもいえる．以下にそれらを述べる．
証明の形式も σ 相についてのものと並行している．

命題 25 $a \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, k \in K_\tau, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P, p \in \mathbb{P}_\tau$ のとき，$p \leq q$ なる任意の $q \in \mathbb{P}_\tau$ に対し $a\, p k\, f$, $a\, \overline{q} k\, f \lessdot$ が成り立ち，$p > q$ なる任意の $q \in \mathbb{P}_\tau$ に対し $a\, p k\, f \lessdot a\, \overline{q} k\, f$ が成り立つ．

証明 前半を示す．$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(a\, p k\, f)\theta = 1$ とする．

$$\begin{aligned}
&(a\, p k\, f)\theta = 1\\
&\iff |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f\big((k/s)\theta\big) = 1\}|_\tau = p \notin (q \rightarrow)
\end{aligned}$$

ゆえに $(a\, \overline{q} k\, f)\theta = 0$ である．
後半を示す．$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$\begin{aligned}
&(a\, p k\, f)\theta = 1\\
&\iff |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f\big((k/s)\theta\big) = 1\}|_\tau = p \in (q \rightarrow)
\end{aligned}$$

ゆえに $(a\, \overline{q} k\, f)\theta = 1$ である． ■

命題 26 $a, b \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, k \in K_\tau, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき次のことが成り立つ．ただし，第一式においては $b \in W_{\varepsilon_\tau}$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}_\tau$ とする．

$$b\,\breve{o}\pi_\tau\,a\triangle,\ b\,\breve{o}k\,f \lessdot a\,\exists k\,f$$

$$b\,\underline{p}\pi_\tau\,a\triangle,\ b\,\overline{p+q}k\,f \lessdot a\,\overline{q}k\,f$$

$$b\,\overline{p+q}\pi_\tau\,a\triangle,\ b\,\underline{p}k\,f \lessdot a\,\overline{q}k\,f$$

証明　第一式の証明

$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $b\,\breve{o}\pi_\tau\,a\triangle = 1, (b\,\breve{o}k\,f)\theta = 1$ を仮定する．

$$b\,\breve{o}\pi_\tau\,a\triangle = 1 \Longleftrightarrow a\,\exists_\tau\,b$$

$$(b\,\breve{o}k\,f)\theta = 1 \Longleftrightarrow f((k/b)\theta) = 1$$

ゆえに $\{s \in S_\tau \mid a\,\exists_\tau\,s, f((k/s)\theta) = 1\} \neq \emptyset$ が成り立つ．

すなわち，$(a\,\exists k\,f)\theta = 1$ が成り立つ．

第二式の証明

$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $b\,\underline{p}\pi_\tau\,a\triangle = 1, (a\,\overline{q}k\,f)\theta = 0$ を仮定する．

$$b\,\underline{p}\pi_\tau\,a\triangle = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid b\,\exists_\tau\,s, a\not\exists_\tau s\}|_\tau \leq p$$

$$(a\,\overline{q}k\,f)\theta = 0 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid a\,\exists_\tau\,s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\tau \leq q$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}
&|\{s \in S_\tau \mid b\,\exists_\tau\,s, f((k/s)\theta) = 1\}| \\
&\leq |\{s \in S_\tau \mid b\,\exists_\tau\,s, a\not\exists_\tau s\}|_\tau + |\{s \in S_\tau \mid a\,\exists_\tau\,s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\tau \\
&\leq p + q
\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち $(b\,\overline{p+q}k\,f)\theta = 0$ である．

第三式も同様に示される． ■

命題 27 $a, b \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, k \in K_\tau, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき次のことが成り立つ．ただし，第一式においては $b \in W_{\varepsilon_\tau}$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}_\tau$ とする．

$$b\,\breve{o}\pi_\tau\,a\triangle,\ a\,\forall k\,f \lessdot b\,\breve{o}k\,f$$

$$b\,\underline{p}\pi_\tau\,a\triangle,\ a\,\underline{q}k\,f \lessdot b\,\underline{p+q}k\,f$$

$$b\,\overline{p+q}\pi_\tau\,a\triangle,\ a\,\underline{q}k\,f \lessdot b\,\overline{p}k\,f$$

証明　第一式の証明

$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $b\,\check{o}\pi_\tau\, a\triangle = 1, (a\,\forall k\, f)\theta = 1$ を仮定する．

$$b\,\check{o}\pi_\tau\, a\triangle = 1 \iff a\,\exists_\tau\, b$$

$$\begin{aligned}&(a\,\forall k\, f)\theta = 1\\ &\iff \text{「} s \in S_\tau, a\,\exists_\tau\, s \text{ ならば} f((k/s)\theta) = 1\text{」}\end{aligned}$$

なので $f((k/b)\theta) = 1$ が成り立つ．すなわち $(b\,\check{o}k\, f)\theta = 1$ が成り立つ．

第二式の証明

$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $b\,\underline{p}\pi_\tau\, a\triangle = 1, (a\,\underline{q}k\, f)\theta = 0$ を仮定する．

$$b\,\underline{p}\pi_\tau\, a\triangle = 1 \iff |\{s \in S_\tau \mid b\,\exists_\tau\, s, a\not\exists_\tau s\}|_\tau \le p$$

$$(a\,\underline{q}k\, f)\theta = 1 \iff |\{s \in S_\tau \mid a\,\exists_\tau\, s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau \le q$$

である．ゆえに

$$\begin{aligned}&|\{s \in S_\tau \mid b\,\exists_\tau\, s, f((k/s)\theta) = 0\}|\\ &\le |\{s \in S_\tau \mid b\,\exists_\tau\, s, a\not\exists_\tau s\}|_\tau + |\{s \in S_\tau \mid a\,\exists_\tau\, s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau\\ &\le p + q\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち $(b\,\underline{p + q}k\, f)\theta = 0$ である．

第三式も同様に示される．■

命題 28 $a \in W_{\varepsilon_\tau}, k \in K, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき，

$$a\,\forall k\, f \le a\,\check{o}k\, f \le a\,\exists k\, f$$

が成り立つ．

証明　$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$(a\,\forall k\, f)\theta = 1 \iff \text{「} s \in S_\tau, a\,\exists_\tau\, s \text{ ならば} f((k/s)\theta) = 1\text{」}$$

$$(a\,\exists k\, f)\theta = 1 \iff \text{「} a\,\exists_\tau\, s, f((k/s)\theta) = 1 \text{ なる } s \in S_\tau \text{ が存在する」}$$

$$(a\,\check{o}k\, f)\theta = f((k/a)\theta)$$

が成り立つ．基本関係が反射的なので

$$\begin{aligned}(a\,\forall k\, f)\theta = 1 &\implies (a\,\check{o}k\, f)\theta = 1\\ (a\,\check{o}k\, f)\theta = 1 &\implies (a\,\exists k\, f)\theta = 1\end{aligned}$$

が成り立つ．■

命題 29 $a, b \in W_{\varepsilon_\tau} \cup A_{\delta_\tau}, k \in K_\tau, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P, p, q \in \mathbb{P}_\tau$ のとき，次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
(a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f &\gtrdot a\,\underline{p}k\,f,\ b\,\underline{q}k\,f \\
(a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\,f &\lessdot a\,\overline{p}k\,f,\ b\,\overline{q}k\,f
\end{aligned}
$$

証明　第一式の証明

$\theta \in (P - \{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して $(a\,\underline{p}k\,f)\theta = 1, (b\,\underline{q}k\,f)\theta = 1$ を仮定する．

$$
(a\,\underline{p}k\,f)\theta = 1 \Longrightarrow |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau \leq p
$$

$$
(b\,\underline{p}k\,f)\theta = 1 \Longrightarrow |\{s \in S_\tau \mid b \exists_\tau s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau \leq q
$$

なので，

$$
\begin{aligned}
&|\{s \in S_\tau \mid a \sqcup b \exists_\tau s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau \\
&\leq |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau + |\{s \in S_\tau \mid b \exists_\tau s, f((k/s)\theta) = 0\}|_\tau \\
&\leq p + q
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って $\big((a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f\big)\theta = 1$ が成り立つ．

第二式は，第一式からブール関係の性質により導かれる． ■

命題 30 $a \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, \lambda$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間，$k \in K_\tau, P, Q \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P, g \in W_Q$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \check{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\tau}$ とする．

$$
f \lessdot g \Longrightarrow a\lambda k\,f \lessdot a\lambda k\,g
$$

証明　$f \lessdot g$ を仮定する．

$\lambda = \check{o}$ のとき

$\theta \in \big((P \cup Q) - \{k\}\big) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(a\,\check{o}k\,f)\theta = 1 &\Longleftrightarrow f((k/a)\theta) = 1 \\
&\Longrightarrow g((k/a)\theta) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (a\,\check{o}k\,g)\theta = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

λ が $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間のとき

λ を $\mathfrak{p}$ で表す．$\theta \in \big((P \cup Q) - \{k\}\big) \rightsquigarrow S$ に対して，$(a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1$ を仮定する．

$$
(a\,\mathfrak{p}k\,f)\theta = 1 \Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f((k/s)\theta) = 1\}|_\tau \in \mathfrak{p}
$$

である．$f((k/s)\theta)=1 \Longrightarrow g((k/s)\theta)=1$ で，$\mathfrak{P}_\tau$ が上方区間なので

$$|\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, g((k/s)\theta)=1\}|_\tau \in \mathfrak{p}$$

が成り立つ．すなわち $(a\,\mathfrak{p}k\,g)\theta=1$ である．

λ が $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間のときも同様にして示される． ■

命題 31 $a \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, b \in W_{\varepsilon_\tau}, \lambda \in \{\breve{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\tau \cup \mathfrak{P}_\tau, k, l \in K_\tau, k \neq l, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，

$$a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f) = b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)$$

が成り立つ．ただし，$\lambda=\breve{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\tau}$ とする．

証明 $\theta \in (P-\{k,l\}) \rightsquigarrow S$ に対して，$\big(a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f)\big)\theta = \big(b\,\breve{o}l\,(a\lambda k\,f)\big)\theta$ を示せばよい．

$\lambda=\breve{o}$ のとき

次の計算により分かる．

$$\begin{aligned}
\big(a\lambda k\,(b\,\breve{o}l\,f)\big)\theta &= (b\,\breve{o}l\,f)\big((k/a)\theta\big)\\
&= f\big((l/b)(k/a)\theta\big)\\
&= f\big((k/a)(l/b)\theta\big)\\
&= (a\,\breve{o}k\,f)\big((l/b)\theta\big)\\
&= \big(b\,\lambda l\,(a\,\breve{o}k\,f)\big)\theta
\end{aligned}$$

$\lambda \in \mathfrak{P}_\tau$ のとき

λ を $\mathfrak{p}$ で表す．

$$\begin{aligned}
&\big(a\,\mathfrak{p}k\,(b\,\breve{o}l\,f)\big)\theta = 1\\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, (b\,\breve{o}l\,f)((k/s)\theta)=1\}|_\tau \in \mathfrak{p}\\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f((l/b)(k/s)\theta)=1\}|_\tau \in \mathfrak{p}\\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid a \exists_\tau s, f((k/s)(l/b)\theta)=1\}|_\tau \in \mathfrak{p}\\
&\Longleftrightarrow (a\,\mathfrak{p}k\,f)((l/b)\theta)=1\\
&\Longleftrightarrow \big(b\,\breve{o}l\,(a\,\mathfrak{p}k\,f)\big)\theta=1
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\tau$ のときも同様である． ■

命題 32 $a, b \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, \lambda$ は $\breve{o}$ または $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間，$k, l \in K_\tau, k \neq l, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda=\breve{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\tau}$ とする．

$$
\begin{aligned}
a\,\lambda k\,(b\,\forall l\,f) &\leq b\,\forall l\,(a\,\lambda k\,f)\\
a\,\lambda k\,(b\,\exists l\,f) &\geq b\,\exists l\,(a\,\lambda k\,f)
\end{aligned}
$$

証明　$\lambda = \breve{o}$ の場合は命題 31 から従う．
　λ が $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間の場合に第一式を示す．
　$b\,\exists_\tau\,s$ なる $s \in S_\tau$ に対して

$$
b\,\forall l\,f \leq s\,\breve{o} l\,f
$$

が成り立つ．命題 30，命題 31 により

$$
\begin{aligned}
a\,\lambda k(b\,\forall l\,f) &\leq a\,\lambda k(s\,\breve{o} l\,f)\\
&= s\,\breve{o} l(a\,\lambda k\,f)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
a\,\lambda k(b\,\forall l\,f) &\leq \inf\{s\,\breve{o} l(a\,\lambda k\,f) \mid b\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s \in S_\tau\}\\
&= b\,\forall l\,(a\,\lambda k\,f)
\end{aligned}
$$

である．
　第二式も同様である．■

命題 33　$a \in W_{\varepsilon_\tau}, k \in K_\tau, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\lessdot (1_\tau\,\forall k\,f) \Rightarrow f\\
&\lessdot (1_\tau\,\forall k\,f) \Rightarrow (a\,\breve{o} k\,f)
\end{aligned}
$$

　ただし，1_τ は $W_{\delta_\tau} = S_\tau \to \mathbb{T}$ の最大元である．

証明　第一式の証明
　任意の $\theta \in P$ に対して，

$$
\big((1_\tau\,\forall k\,f) \Rightarrow f\big)\theta = (1_\tau\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}} \Rightarrow f\theta
$$

である．

$$
\begin{aligned}
&(1_\tau\,\forall k\,f)\theta|_{P-\{k\}} = 1\\
&\Longleftrightarrow s \in S_\tau \text{ ならば } f((k/s)\theta|_{P-\{k\}}) = 1\\
&\Longrightarrow f\theta = 1
\end{aligned}
$$

なので，$(1_\tau \forall k\, f)\theta|_{P-\{k\}} \Rightarrow f\theta$ が成り立つ．

第二式の証明

任意の $\theta \in (P-\{k\})$ に対して $\big((1_\tau \forall k\, f) \Rightarrow (a\,\check{o}k\, f)\big)\theta = 1$ を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&(1_\tau \forall k\, f)\theta = 1\\
&\iff s \in S_\tau \text{ ならば } f((k/s)\theta) = 1\\
&\iff s \in S_\tau \text{ ならば } (s\,\check{o}k\, f)\theta = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，$(1_\tau \forall k\, f)\theta = 1$ ならば $(a\,\check{o}k\, f)\theta = 1$ である． ■

命題 34 $k \in K_\tau, P \in \mathcal{P}^k K, f \in W_P$ のとき，次の三つは同等である．

$$
\begin{aligned}
&\lessdot 1_\tau \forall k\, f\\
&\text{任意の } t \in S_\tau \text{ に対して } \lessdot t\,\check{o}k\, f\\
&\lessdot f
\end{aligned}
$$

証明 $\theta \in (P-\{k\}) \rightsquigarrow S$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(1_\tau \forall k\, f)\theta = 1\\
&\iff \text{任意の } s \in S_\tau \text{ に対して } f((k/s)\theta) = 1\\
&\iff \text{任意の } s \in S_\tau \text{ に対して } (s\,\check{o}k\, f)\theta = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，

$$
\begin{aligned}
&\text{任意の } \theta \in (P-\{k\}) \rightsquigarrow S, s \in S_\tau \text{ に対して } f((k/s)\theta) = 1\\
&\iff \text{任意の } \theta' \in P \rightsquigarrow S \text{ に対して } f\theta' = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ． ■

5.1.3 相が混在する場合について

σ 相と τ 相の実在が混在する場合を考察する．ここでの関心は，t が τ 相の実在，a が σ 相の実在のとき，

$$t\lambda k\,(a\,\mu l\, f)$$

と

$$a\,\mu l\,(t\lambda k\, f)$$

が等しいかどうかを調べることである．

$\lambda \in \{\check{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\tau \cup \mathfrak{P}_\tau, \mu \in \{\check{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma \cup \mathfrak{P}_\sigma, k \in K_\tau, l \in K_\sigma$ の種類により，場合分けして論じることが必要になる．

命題 35 $t \in W_{\varepsilon_\tau}, a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \mu \in \{\breve{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma \cup \mathfrak{P}_\sigma, k \in K_\tau - \{\kappa_\tau\}, l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ とする．

このとき，$t\,\breve{o}k\,(a\,\mu l\,f) = a\,\mu l\,(t\,\breve{o}k\,f)$ が成り立つ．

証明 $\theta \in (P - \{k, l\}) \rightsquigarrow S$ に対して，$\big(t\,\breve{o}k\,(a\,\mu l\,f)\big)\theta = \big(a\,\mu l\,(t\,\breve{o}k\,f)\big)\theta$ を示せばよい．

$\mu = \breve{o}$ のとき

次の計算により分かる．

$$\begin{aligned}
\big(t\,\breve{o}k\,(a\,\breve{o}l\,f)\big)\theta &= (a\,\breve{o}l\,f)\big((k/t)\theta\big) \\
&= f\big((l/a)(k/t)\theta\big) \\
&= f\big((k/t)(l/a)\theta\big) \\
&= (t\,\breve{o}k\,f)\big((l/a)\theta\big) \\
&= \big(a\,\breve{o}l\,(t\,\breve{o}k\,f)\big)\theta
\end{aligned}$$

$\mu \in \mathfrak{P}_\sigma$ のとき

μ を $\mathfrak{p}$ で表す．$\kappa_\tau \in P$ ならば，

$$\begin{aligned}
&\big(t\,\breve{o}k\,(a\,\mathfrak{p}l\,f)\big)\theta = 1 \\
&\Longleftrightarrow (a\,\mathfrak{p}l\,f)((k/t)\theta) = 1 \\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((l/s)(k/t)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{\theta\kappa_\tau} s, f((k/t)(l/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_{\theta\kappa_\tau} s, (t\,\breve{o}k\,f)((l/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\Longleftrightarrow \big(a\,\mathfrak{p}l\,(t\,\breve{o}k\,f)\big)\theta = 1
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$\kappa_\tau \notin P$ ならば，$\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ に置き換えた議論が成り立つ．

$\mu \in \neg\mathfrak{P}_\sigma$ のときも同様である． ■

命題 36 $t \in W_{\varepsilon_\tau}, a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \mu \in \{\breve{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma \cup \mathfrak{P}_\sigma, l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^{\kappa_\tau} K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ とする．

a が不変な実在ならば，$t\,\breve{o}\kappa_\tau\,(a\,\mu l\,f) = a\,\mu l\,(t\,\breve{o}\kappa_\tau\,f)$ が成り立つ．

証明 $\mu = \breve{o}$ のときは，命題 35 の証明と同様である．

$\mu \in \mathfrak{P}_\sigma$ のとき，μ を $\mathfrak{p}$ で表す．

$\theta \in (P - \{\kappa_\tau, l\}) \rightsquigarrow S$ を任意にとる．

$$\begin{aligned}
&\big(t\,\breve{o}\kappa_\tau\,(a\,\mathfrak{p}k\,f)\big)\theta = 1 \\
&\Longleftrightarrow (a\,\mathfrak{p}k\,f)((\kappa_\tau/t)\theta) = 1 \\
&\Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid a \exists_t s, f((k/s)(\kappa_\tau/t)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

である．一方，

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,f)\bigr)\theta = 1\\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{a}\,\exists_{t_0}\,s, (t\,\check{o}\kappa_\tau\,f)((k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}\\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid \mathfrak{a}\,\exists_{t_0}\,s, f((\kappa_\tau/t)(k/s)\theta) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}
\end{aligned}
$$

である．

$\mathfrak{a}$ が不変な実在なので，上の二つは同値である．θ は任意なので，

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,f) = t\,\check{o}\kappa_\tau\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}k\,f)$$

が成り立つ．

$\mu \in \neg\mathfrak{P}_\sigma$ のときも同様である． ■

命題 37 $t \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, \mathfrak{a} \in W_{\varepsilon_\sigma}, \lambda \in \{\check{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\tau \cup \mathfrak{P}_\tau, k \in K_\tau - \{\kappa_\tau\}, l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ とする．

このとき，$t\lambda k\,(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,f) = \mathfrak{a}\,\check{o}l\,(t\lambda k\,f)$ が成り立つ．

証明 $\theta \in (P - \{k, l\}) \rightsquigarrow S$ に対して，$\bigl(t\lambda k\,(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,f)\bigr)\theta = \bigl(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,(t\lambda k\,f)\bigr)\theta$ を示せばよい．

$\lambda = \check{o}$ のとき

次の計算により分かる．

$$
\begin{aligned}
\bigl(t\,\check{o}k\,(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,f)\bigr)\theta &= (\mathfrak{a}\,\check{o}l\,f)\bigl((k/t)\theta\bigr)\\
&= f\bigl((l/\mathfrak{a})(k/t)\theta\bigr)\\
&= f\bigl((k/t)(l/\mathfrak{a})\theta\bigr)\\
&= (t\,\check{o}k\,f)\bigl((l/\mathfrak{a})\theta\bigr)\\
&= \bigl(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,(t\,\check{o}k\,f)\bigr)\theta
\end{aligned}
$$

$\lambda \in \mathfrak{P}_\tau$ のとき

λ を $\mathfrak{p}$ で表す．

$$
\begin{aligned}
&\bigl(t\,\mathfrak{p}k\,(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,f)\bigr)\theta = 1\\
&\iff |\{s \in S_\tau \mid t\,\exists_\tau\,s, (\mathfrak{a}\,\check{o}l\,f)((k/s)\theta) = 1\}|_\tau \in \mathfrak{p}\\
&\iff |\{s \in S_\tau \mid t\,\exists_\tau\,s, f((l/\mathfrak{a})(k/s)\theta) = 1\}|_\tau \in \mathfrak{p}\\
&\iff |\{s \in S_\tau \mid t\,\exists_\tau\,s, f((k/s)(l/\mathfrak{a})\theta) = 1\}|_\tau \in \mathfrak{p}\\
&\iff (t\,\mathfrak{p}k\,f)((l/\mathfrak{a})\theta) = 1\\
&\iff \bigl(\mathfrak{a}\,\check{o}l\,(t\,\mathfrak{p}k\,f)\bigr)\theta = 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

$\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\tau$ のときも同様である． ■

命題 38 $t \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \lambda$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間，$k \in K_\tau - \{\kappa_\tau\}, l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \check{o}$ の場合は $t \in W_{\varepsilon_\tau}$ とする．

$$
\begin{aligned}
t\,\lambda k\,(a\,\forall l\,f) &\leq a\,\forall l\,(t\,\lambda k\,f) \\
t\,\lambda k\,(a\,\exists l\,f) &\geq a\,\exists l\,(t\,\lambda k\,f)
\end{aligned}
$$

証明　$\lambda = \check{o}$ の場合は命題 35 から従う．

λ が $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間の場合に第一式を示す．

$\kappa_\tau \in P$ のとき，$a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s$ なる $s \in S_\sigma$ に対して

$$a\,\forall l\,f \leq s\,\check{o} l\,f$$

が成り立つ．命題 30，命題 37 により

$$
\begin{aligned}
t\,\lambda k(a\,\forall l\,f) &\leq t\,\lambda k(s\,\check{o} l\,f) \\
&= s\,\check{o} l(t\,\lambda k\,f)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって

$$
\begin{aligned}
t\,\lambda k(a\,\forall l\,f) &\leq \inf\{s\,\check{o} l(t\,\lambda k\,f) \mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s \in S_\sigma\} \\
&= a\,\forall l\,(t\,\lambda k\,f)
\end{aligned}
$$

である．

$\kappa_\tau \notin P$ の場合は，$\exists_{\theta\kappa_\tau}$ を $\exists_{t_0}$ に置き換えた議論が成り立つ．

第二式も同様である．■

命題 39 $t \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \mu$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間，$k \in K_\tau - \{\kappa_\tau\}, l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\mu = \check{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

$$
\begin{aligned}
t\,\forall k\,(a\,\mu l\,f) &\geq a\,\mu l\,(t\,\forall k\,f) \\
t\,\exists k\,(a\,\mu l\,f) &\leq a\,\mu l\,(t\,\exists k\,f)
\end{aligned}
$$

証明　$\mu = \check{o}$ の場合は命題 37 から従う．

μ が $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間の場合に第一式を示す．

$t\,\exists_\tau\,s$ なる $s \in S_\tau$ に対して

$$t\,\forall k\,f \leq s\,\check{o} k\,f$$

が成り立つ．命題 20，命題 35 により

$$\begin{aligned} a\,\mu l(t\,\forall k\,f) &\le a\,\mu l(s\,\check{o}k\,f) \\ &= s\,\check{o}k(a\,\mu l\,f) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} a\,\mu l(t\,\forall k\,f) &\le \inf\{s\,\check{o}k(a\,\mu l\,f) \mid t\,\exists_\tau\,s \in S_\tau\} \\ &= t\,\forall k\,(a\,\mu l\,f) \end{aligned}$$

である．

第二式も同様である． ■

命題 40 $t \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \lambda$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間，$l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^{\kappa_\tau}K \cap \mathcal{P}^{l}K, f \in W_P$ とする．

a が不変な実在ならば，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \check{o}$ の場合は $t \in W_{\varepsilon_\tau}$ とする．

$$\begin{aligned} t\,\lambda\kappa_\tau\,(a\,\forall l\,f) &\le a\,\forall l\,(t\,\lambda\kappa_\tau\,f) \\ t\,\lambda\kappa_\tau\,(a\,\exists l\,f) &\ge a\,\exists l\,(t\,\lambda\kappa_\tau\,f) \end{aligned}$$

証明　$\lambda = \check{o}$ の場合は命題 36 から従う．

λ が $\mathfrak{P}_\tau$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\tau$ の下方区間の場合に第一式を示す．

$a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s$ なる $s \in S_\sigma$ に対して

$$a\,\forall l\,f \le s\,\check{o}l\,f$$

が成り立つ．命題 30，命題 37 により

$$\begin{aligned} t\,\lambda\kappa_\tau(a\,\forall l\,f) &\le t\,\lambda\kappa_\tau(s\,\check{o}l\,f) \\ &= s\,\check{o}l(t\,\lambda\kappa_\tau\,f) \end{aligned}$$

が成り立つ．a は不変な実在なので，

$$\begin{aligned} t\,\lambda\kappa_\tau(a\,\forall l\,f) &\le \inf\{s\,\check{o}l(t\,\lambda\kappa_\tau\,f) \mid a\,\exists_{\theta\kappa_\tau}\,s \in S_\sigma\} \\ &\le \inf\{s\,\check{o}l(t\,\lambda\kappa_\tau\,f) \mid a\,\exists_{t_0}\,s \in S_\sigma\} \\ &= a\,\forall l\,(t\,\lambda\kappa_\tau\,f) \end{aligned}$$

である．

第二式も同様である． ■

命題 **41**　$t \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}, a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}, \mu$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間，$l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^{\kappa_\tau}K \cap \mathcal{P}^{l}K, f \in W_P$ とする．

a が不変な実在ならば，次のことが成り立つ．ただし，$\mu = \check{o}$ の場合は $a \in W_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

$$t \,\forall\kappa_\tau\, (a\, \mu l\, f) \geq a\, \mu l\, (t \,\forall\kappa_\tau\, f)$$
$$t \,\exists\kappa_\tau\, (a\, \mu l\, f) \leq a\, \mu l\, (t \,\exists\kappa_\tau\, f)$$

証明　$\mu = \check{o}$ の場合は命題 37 から従う．

μ が $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間の場合に第一式を示す．

$t \,\exists_\tau\, s$ なる $s \in S_\tau$ に対して

$$t \,\forall\kappa_\tau\, f \leq s \,\check{o}\kappa_\tau\, f$$

が成り立つ．命題 20，命題 36 により

$$\begin{aligned} a\, \mu l(t \,\forall\kappa_\tau\, f) &\leq a\, \mu l(s \,\check{o}\kappa_\tau\, f) \\ &= s \,\check{o}\kappa_\tau(a\, \mu l\, f) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} a\, \mu l(t \,\forall\kappa_\tau\, f) &\leq \inf\{s \,\check{o}\kappa_\tau(a\, \mu l\, f) \mid t \,\exists_\tau\, s \in S_\tau\} \\ &= t \,\forall\kappa_\tau\, (a\, \mu l\, f) \end{aligned}$$

である．

第二式も同様である．■

5.1.4　算法 △ について

命題 **42**　$a \in W_{\varepsilon_\sigma}$ のとき，

$$\lessdot a \,\check{o}\pi_\sigma\, a\triangle$$

が成り立つ．

$a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup W_{\delta_\sigma}$ のとき，

$$\lessdot a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle$$

が成り立つ．

証明　まず前半を示す．$a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle$ の枠は $\{\kappa_\tau\}$ である．任意の $\theta \in \{\kappa_\tau\} \rightsquigarrow S$ は $(\kappa_\tau/t), t \in S_\tau$ の形に書ける．そこで任意の $t \in S_\tau$ に対して

$$(a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1$$

を示せばよい．

$$(a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1 \iff a \,\exists_t\, a$$

であり，$\exists_t$ は反射的関係だからこれは成り立つ．

次に後半を示す．前半と同様に，任意の $t \in S_\tau$ に対して

$$(a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
&(a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1\\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_t\, s, (a\triangle)\big((\pi_\sigma/s)(\kappa_\tau/t)\big) = 0\}|_\sigma \in [00]\\
&\iff s \in S_\sigma, a \,\exists_t\, s \text{ ならば } (a\triangle)\big((\pi_\sigma/s)(\kappa_\tau/t)\big) = 1\\
&\iff s \in S_\sigma, a \,\exists_t\, s \text{ ならば } a \,\exists_t\, s
\end{aligned}$$

よって，$(a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1$ が成り立つ．■

命題 43　$a \in W_{\varepsilon_\sigma}, t \in W_{\varepsilon_\tau}$ のとき，

$$\lessdot t \,\breve{o}\kappa_\tau\, (a \,\breve{o}\pi_\sigma\, a\triangle)$$

が成り立つ．

$a \in W_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, t \in W_{\varepsilon_\tau}$ のとき，

$$\lessdot t \,\breve{o}\kappa_\tau\, (a \,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)$$

が成り立つ．

証明　命題 42 と命題 34 とから従う．■

注意　これに対して

$$\lessdot a \,\forall\pi_\sigma\, (t \,\breve{o}\kappa_\tau\, a\triangle)$$

は成り立たない．なぜなら，

$$\begin{aligned}
&a \,\forall\pi_\sigma\, (t \,\breve{o}\kappa_\tau\, a\triangle) = 1\\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_{t_0}\, s, (t \,\breve{o}\kappa_\tau\, a\triangle)(\pi_\sigma/s) = 0\}|_\sigma \in [00]\\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_{t_0}\, s, (a\triangle)((\kappa_\tau/t)(\pi_\sigma/s)) = 0\}|_\sigma \in [00]\\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid a \,\exists_{t_0}\, s, a \,\exists_t\, s \text{ でない }\}|_\sigma \in [00]\\
&\iff s \in S_\sigma, a \,\exists_{t_0}\, s, \text{ ならば } a \,\exists_t\, s
\end{aligned}$$

となるが，これは一般に成り立たないからである．■

命題 44 $t \in W_{\varepsilon_\tau}$ のとき，

$$\lessdot t\,\check{\mathrm{o}}\pi_\tau\, t\triangle$$

が成り立つ．

$t \in W_{\varepsilon_\tau} \cup W_{\delta_\tau}$ のとき，

$$\lessdot t\,\forall\pi_\tau\, t\triangle$$

が成り立つ．

証明　前半の証明

$t\,\check{\mathrm{o}}\pi_\tau\, t\triangle$ の枠は $\emptyset$ である．

$$t\,\forall\pi_\tau\, t\triangle = 1 \Longleftrightarrow t\,\exists_\tau\, t$$

であり，$\exists_\tau$ は反射的関係だから $t\,\forall\pi_\tau\, t\triangle = 1$ が成り立つ．

後半の証明

$$\begin{aligned}
& t\,\forall\pi_\tau\, t\triangle = 1 \\
& \Longleftrightarrow |\{s \in S_\tau \mid t\,\exists_\tau\, s, (t\triangle)(\pi_\tau/t) = 0\}|_\tau \in [00] \\
& \Longleftrightarrow s \in S_\tau, t\,\exists_\tau\, s \text{ ならば } (t\triangle)(\pi_\tau/s) = 1 \\
& \Longleftrightarrow s \in S_\tau, t\,\exists_\tau\, s \text{ ならば } t\,\exists_\tau\, s
\end{aligned}$$

ゆえに，$t\,\forall\pi_\tau\, t\triangle = 1$ が成り立つ．■

5.2　単相格言語に類似の恒真関係

状況相をもつ格言語 A は，単相格言語と似通った構造を持つ．そこで恒真関係についても単相格言語に類似する命題が成り立つことが期待される．この項ではそのことを確認する．

定義 15 $\mathrm{one}_\sigma \in A_{\delta_\sigma}, \mathrm{one}_\tau \in A_{\delta_\tau}$ を次のように定義する．

$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}, y \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau}$ を任意にとり，

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_\sigma &= (x\,\check{\mathrm{o}}\pi_\sigma\, x\triangle)\Omega x \\
\mathrm{one}_\tau &= (y\,\check{\mathrm{o}}\pi_\tau\, y\triangle)\Omega y
\end{aligned}$$

とする．■

この定義は，次の意味で変数 x, y のとり方によらない．

命題 45 任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して，

$$\big(\Phi^*(\mathrm{one}_\sigma)\big)\nu = 1_\sigma$$
$$\big(\Phi^*(\mathrm{one}_\tau)\big)\nu = 1_\tau$$

が成り立つ．ただし，$1_\sigma, 1_\tau$ はそれぞれ $W_{\delta_\sigma} = S_\tau \to (S_\sigma \to \mathbb{T}), W_{\delta_\tau} = S_\tau \to \mathbb{T}$ の最大元である．

証明

$$\begin{aligned}\big(\Phi^*(\mathrm{one}_\sigma)\big)\nu &= \Big(\Phi^*\big((x\,\check{o}\pi_\sigma\,x\triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \\ &= \big((\Phi^* x\,\check{o}\pi_\sigma\,\Phi^* x\triangle)\Omega x\big)\nu\end{aligned}$$

である．任意の $s \in S_\sigma, t \in S_\tau$ に対して $\big(\Phi^*(\mathrm{one}_\sigma)\big)\nu\,\exists_t\,s$ を示す．

$$\begin{aligned}&\big(\Phi^*(\mathrm{one}_\sigma)\big)\nu\,\exists_t\,s \\ &\Longleftrightarrow \big((\Phi^* x\,\check{o}\pi_\sigma\,\Phi^* x\triangle)\Omega x\big)\nu\,\exists_t\,s \\ &\Longleftrightarrow \big((\Phi^* x\,\check{o}\pi_\sigma\,\Phi^* x\triangle)((x/s)\nu)\big)(\kappa_\tau/t) = 1 \\ &\Longleftrightarrow (s\,\check{o}\pi_\sigma\,s\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1 \\ &\Longleftrightarrow s\,\exists_t\,s\end{aligned}$$

である．基本関係が反射的なのでこれは成り立つ．
　one_τ についても同様である． ■

命題 46 $a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P$ のとき，$p, q \in \mathbb{P}_\sigma$ について次のことが成り立つ．

$$p \le q \text{ なら } a\,pk\,f,\ a\,\overline{q}k\,f \preccurlyeq$$
$$p > q \text{ なら } a\,pk\,f \preccurlyeq a\,\overline{q}k\,f$$

証明　第一式の証明
　任意の定付値 Φ，定付値 ν に対して

$$\big(\Phi^*(a\,pk\,f)\big)\nu,\ \big(\Phi^*(a\,\overline{q}k\,f)\big)\nu \lessdot$$

を示せばよい．

$$\big(\Phi^*(a\,pk\,f)\big)\nu = (\Phi^* a)\nu\,pk\,(\Phi^* f)\nu$$
$$\big(\Phi^*(a\,\overline{q}k\,f)\big)\nu = (\Phi^* a)\nu\,\overline{q}k\,(\Phi^* f)\nu$$

であり，命題 15 により，

$$(\Phi^* a)\nu\, p k\, (\Phi^* f)\nu,\ (\Phi^* a)\nu\, \overline{q} k\, (\Phi^* f)\nu \lessdot$$

が成り立つ．

第二式も命題 15 から従う． ■

以下，この項の命題は，同様の議論によって容易に示される．

命題 47 $a, b \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，第一式においては $b \in A_{\varepsilon_\sigma}$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}_\sigma, \kappa_\tau \in P$ とする．

$$\begin{aligned} b\, \check{o}\pi_\sigma\, a\triangle,\ b\, \check{o} k\, f &\preccurlyeq a\, \exists k\, f \\ b\, \underline{p}\pi_\sigma\, a\triangle,\ b\, \overline{p+q} k\, f &\preccurlyeq a\, \overline{q} k\, f \\ b\, \overline{p+q}\pi_\sigma\, a\triangle,\ b\, \underline{p} k\, f &\preccurlyeq a\, \overline{q} k\, f \end{aligned}$$

証明　第一式の証明

任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して

$$\big(\Phi^*(b\, \check{o}\pi_\sigma\, a\triangle)\big)\nu,\ \big(\Phi^*(b\, \check{o} k\, f)\big)\nu \lessdot \big(\Phi^*(a\, \exists k\, f)\big)\nu$$

を示せばよい．各元を計算すると

$$(\Phi^* b)\nu\, \check{o}\pi_\sigma\, (\Phi^* a)\nu\triangle,\ (\Phi^* b)\nu\, \check{o} k\, (\Phi^* f)\nu \lessdot (\Phi^* a)\nu\, \exists k\, (\Phi^* f)\nu$$

となり，これは命題 16 の結論である．

第二式，第三式も同様である． ■

命題 48 $a, b \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，第一式においては $b \in A_{\varepsilon_\sigma}$ とし，第二式と第三式においては $p, q \in \mathbb{P}_\sigma, \kappa_\tau \in P$ とする．

$$\begin{aligned} b\, \check{o}\pi_\sigma\, a\triangle,\ a\, \forall k\, f &\preccurlyeq b\, \check{o} k\, f \\ b\, \underline{p}\pi_\sigma\, a\triangle,\ a\, \underline{q} k\, f &\preccurlyeq b\, \underline{p+q} k\, f \\ b\, \overline{p+q}\pi_\sigma\, a\triangle,\ a\, \underline{q} k\, f &\preccurlyeq b\, \overline{p} k\, f \end{aligned}$$

証明　命題 17 から従う． ■

命題 49 $a, \in A_{\varepsilon_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} a\, \forall k\, f &\preccurlyeq a\, \check{o} k\, f \\ a\, \check{o} k\, f &\preccurlyeq a\, \exists k\, f \end{aligned}$$

証明　命題 18 から従う． ■

命題 50 $a, b \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P, p, q \in \mathbb{P}_\sigma$ のとき，次のことが成り立つ．

$$(a \sqcup b)\,\underline{p+q}k\,f \succcurlyeq a\,\underline{p}k\,f,\ b\,\underline{q}k\,f$$
$$(a \sqcup b)\,\overline{p+q}k\,f \preccurlyeq a\,\overline{p}k\,f,\ b\,\overline{q}k\,f$$

証明　命題 19 から従う． ■

命題 51 $a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, \lambda$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間，$k \in K_\sigma, P, Q \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P, g \in A_Q$ のとき，A から任意の状況相をもつ世界 W への任意の定付値 Φ に対して次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \check{o}$ の場合は $a \in A_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

$$f \preccurlyeq_\Phi g \Longrightarrow a\lambda k\,f \preccurlyeq_\Phi a\lambda k\,g$$

証明　命題 20 から従う． ■

命題 52 $a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, b \in A_{\varepsilon_\sigma}, \lambda \in \{\check{o}\} \cup \neg\mathfrak{P}_\sigma \cup \mathfrak{P}_\sigma, k, l \in K_\sigma, k \neq l, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in A_P$ のとき，

$$a\lambda k\,(b\,\check{o}l\,f) \asymp b\,\check{o}l\,(a\lambda k\,f)$$

が成り立つ．ただし，$\lambda = \check{o}$ の場合は $a \in A_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

証明　命題 21 から従う． ■

命題 53 $a, b \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, \lambda$ は $\check{o}$ または $\mathfrak{P}_\sigma$ の上方区間または $\neg\mathfrak{P}_\sigma$ の下方区間，$k, l \in K_\sigma, k \neq l, P \in \mathcal{P}^k K \cap \mathcal{P}^l K, f \in W_P$ のとき，次のことが成り立つ．ただし，$\lambda = \check{o}$ の場合は $a \in A_{\varepsilon_\sigma}$ とする．

$$a\lambda k\,(b\,\forall l\,f) \preccurlyeq b\,\forall l\,(a\lambda k\,f)$$
$$a\lambda k\,(b\,\exists l\,f) \succcurlyeq b\,\exists l\,(a\lambda k\,f)$$

証明　命題 22 から従う． ■

命題 54 $a \in A_{\varepsilon_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\preccurlyeq (\mathrm{one}_\sigma\,\forall k\,f) \Rightarrow f$$
$$\preccurlyeq (\mathrm{one}_\sigma\,\forall k\,f) \Rightarrow (a\,\check{o}k\,f)$$

証明　命題 23 から従う． ■

命題 55 $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}, k \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^k K, f \in A_P$ で，x が f に自由に現れないとき，次の三つは同等である．

$$\preccurlyeq \mathrm{one}_\sigma \forall k\, f$$
$$\preccurlyeq x\, \check{o} k\, f$$
$$\preccurlyeq f$$

証明

$\preccurlyeq \mathrm{one}_\sigma \forall k\, f$
$\iff$ 任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して $\lessdot \big(\Phi^*(\mathrm{one}_\sigma \forall k\, f)\big)\nu$
$\iff$ 任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して $\lessdot 1_\sigma \forall k\,(\Phi^* f)\nu$

$\preccurlyeq x\, \check{o} k\, f$
$\iff$ 任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して $\lessdot \big(\Phi^*(x\, \check{o} k\, f)\big)\nu$
$\iff$ 任意の定付値 Φ，変付値 ν と，任意の $s \in S_\sigma$ に対して
$\lessdot s\, \check{o} k\, \big((\Phi^* f)((x/s)\nu)\big)$

$\preccurlyeq f$
$\iff$ 任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して $\lessdot (\Phi^* f)\nu$

である．意味写像定理により $(\Phi^* f)((x/s)\nu) = (\Phi^* f)\nu$ であることと，命題 24 とから，これらは同値であることが分かる． ■

5.3 状況相と算法 $\triangle, \Omega x$ に関する恒真関係

従来の格言語にはない概念として状況相を導入したことが，恒真関係にどのように影響するのかを考察する．

命題 56 $t \in A_{\varepsilon_\tau}, P \in \mathcal{P}^{\kappa_\tau} K, f \in A_P$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\preccurlyeq (\mathrm{one}_\tau \forall \kappa_\tau\, f) \Rightarrow f$$
$$\preccurlyeq (\mathrm{one}_\tau \forall \kappa_\tau\, f) \Rightarrow (t\, \check{o} \kappa_\tau\, f)$$

証明　命題 33 から従う．■

命題 57 $x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\tau}, P \in \mathcal{P}^{\kappa_\tau}K, f \in A_P$ で，x が f に自由に現れないとき，次の三つは同等である．

$$\begin{aligned}&\preccurlyeq \mathrm{one}_\tau \forall\kappa_\tau f\\&\preccurlyeq x\,\check{o}\kappa_\tau f\\&\preccurlyeq f\end{aligned}$$

証明　命題 34 から従う．■

命題 58 $a \in A_{\varepsilon_\sigma}$ のとき，

$$\preccurlyeq a\,\check{o}\pi_\sigma\, a\triangle$$

が成り立つ．

$a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}$ のとき，

$$\preccurlyeq a\,\forall\pi_\sigma\, a\triangle$$

が成り立つ．

証明　命題 42 から従う．■

命題 59 $t \in A_{\varepsilon_\tau}, a \in A_{\varepsilon_\sigma}$ のとき，

$$\preccurlyeq t\,\check{o}\kappa_\tau\,(a\,\check{o}\pi_\sigma\, a\triangle)$$

が成り立つ．

$t \in A_{\varepsilon_\tau}, a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}$ のとき，

$$\preccurlyeq t\,\check{o}\kappa_\tau\,(a\,\forall\pi_\sigma\, a\triangle)$$

が成り立つ．

証明　命題 43 から従う．■

注意　これに対して，

$$\preccurlyeq a\,\forall\pi_\sigma\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\, a\triangle)$$

は成り立たない．

命題 60 $f \in A_\emptyset, x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ のとき，任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して $\big(\Phi^*(f\Omega x)\big)\nu$ は不変な実在である．

証明　$\big(\Phi^*(f\Omega x)\big)\nu = \big(((\Phi^* f)\Omega x)\big)\nu$ である．任意の $t \in S_\tau, s \in S_\sigma$ に対して，

$$\big(((\Phi^* f)\Omega x)\big)\nu \,\exists_t\, s \iff (\Phi^* f)((x/s)\nu) = 1$$

である．これは t によらず成り立つので，$\big(((\Phi^* f)\Omega x)\big)\nu$ は不変な実在である．■

命題 61　$t \in A_{\varepsilon_\tau}, a \in A_{\varepsilon_\sigma}, l \in K_\sigma, P \in \mathcal{P}^{\kappa_\tau}K \cup \mathcal{P}^{l}K, f \in A_P$ のとき，

$$(t\,\check{o}\kappa_\tau\,(a\,\check{o}l\,f)) \asymp (a\,\check{o}l\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,f))$$

が成り立つ．

証明　命題 36 により，任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して，

$$\begin{aligned}
&\big(\Phi^*(t\,\check{o}\kappa_\tau\,(a\,\check{o}l\,f))\big)\nu \\
&= (\Phi^* t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,\big((\Phi^* a)\nu\,\check{o}l\,(\Phi^* f)\nu\big) \\
&= (\Phi^* a)\nu\,\check{o}l\,\big((\Phi^* t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,(\Phi^* f)\nu\big) \\
&= \big(\Phi^*(a\,\check{o}l\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,f))\big)\nu
\end{aligned}$$

が成り立つ．■

命題 62　$t \in A_{\varepsilon_\tau}, a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, b \in A_{\varepsilon_\sigma}$ のとき，

$$(t\,\check{o}\kappa_\tau\,(b\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)) \asymp (b\,\check{o}\pi_\sigma\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle))$$

が成り立つ．

証明　命題 61 の特別な場合である．■

命題 63　$x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}, l \in K_\sigma, P = \{l\}$ または $\{\kappa_\tau, l\}, f \in A_P$ で，x が f に自由に現れないとき，

$$\preccurlyeq (x\,\check{o}l\,f)\Omega x \,\forall l\, f$$

が成り立つ．

注意　$(x\,\check{o}l\,f)\Omega x$ が定義されるのは $P = \{l\}$ または $\{\kappa_\tau, l\}, f \in A_P$ の場合に限る．

証明　(i) $P = \{l\}$ の場合

任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して

$$\Big(\Phi^*\big((x\,\check{o}l\,f)\Omega x \,\forall l\, f\big)\Big)\nu = 1$$

を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Phi^*\big((x\,\check{o}l\,f)\Omega x\,\forall l\,f\big)\Big)\nu = 1\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\forall l\,(\Phi^*f)\nu = 1\\
&\Longleftrightarrow s \in S_\sigma, \big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\exists_{t_0}\,s\ \text{ならば}\ \big((\Phi^*f)\nu\big)(l/s) = 1
\end{aligned}
$$

であり，算法 Ωx の定義，意味写像定理により

$$
\begin{aligned}
&\big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\exists_{t_0}\,s\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\big((x/s)\nu\big) = 1\\
&\Longleftrightarrow s\,\check{o}l\,(\Phi^*f)\nu = 1\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^*f)\nu\big)(l/s) = 1
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\Big(\Phi^*\big((x\,\check{o}l\,f)\Omega x\,\forall l\,f\big)\Big)\nu = 1
$$

が成り立つ．

(ii) $P = \{\kappa_\tau, l\}$ の場合

任意の定付値 Φ，変付値 ν と任意の $t \in S_\tau$ に対して

$$
\bigg(\Big(\Phi^*\big((x\,\check{o}l\,f)\Omega x\,\forall l\,f\big)\Big)\nu\bigg)(\kappa_\tau/t) = 1
$$

を示せばよい．

$$
\Big(\Phi^*\big((x\,\check{o}l\,f)\Omega x\,\forall l\,f\big)\Big)\nu = \big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\forall l\,(\Phi^*f)\nu
$$

である．

$$
\begin{aligned}
&\Big(\big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\forall l\,(\Phi^*f)\nu\Big)(\kappa_\tau/t) = 1\\
&\Longleftrightarrow s \in S_\sigma, \big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\exists_t\,s\ \text{ならば}\ \big((\Phi^*f)\nu\big)\big((l/s)(\kappa_\tau/t)\big) = 1
\end{aligned}
$$

であり，算法 Ωx の定義，意味写像定理により

$$
\begin{aligned}
&\big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\exists_t\,s\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)((x/s)\nu)\big)(\kappa_\tau/t) = 1\\
&\Longleftrightarrow \big(s\,\check{o}l\,(\Phi^*f)\nu\big)(\kappa_\tau/t) = 1\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^*f)\nu\big)\big((l/s)(\kappa_\tau/t)\big) = 1
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\Big(\big((\Phi^*x\,\check{o}l\,\Phi^*f)\Omega x\big)\nu\,\forall l\,(\Phi^*f)\nu\Big)(\kappa_\tau/t) = 1
$$

が成り立つ． ■

命題 64 $t \in A_{\varepsilon_\tau}, x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}, l \in K_\sigma, P = \{\kappa_\tau, l\}, f \in A_P$ で，x が t, f に自由に現れないとき，

$$\preccurlyeq (x \, \breve{o} l \, (t \, \breve{o} \kappa_\tau \, f))\Omega x \, \forall l \, (t \, \breve{o} \kappa_\tau \, f)$$

が成り立つ．

証明　命題 63 による． ■

命題 65 $a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ で，x が a に自由に現れないとき，

$$\preccurlyeq (x \, \breve{o} \pi_\sigma \, a \triangle)\Omega x \, \forall \pi_\sigma \, a \triangle$$

が成り立つ．

さらに，$t \in A_{\varepsilon_\tau}$ で，x が t に自由に現れないとき，

$$\preccurlyeq (x \, \breve{o} \pi_\sigma \, (t \, \breve{o} \kappa_\tau \, a \triangle))\Omega x \, \forall \pi_\sigma \, (t \, \breve{o} \kappa_\tau \, a \triangle)$$

が成り立つ．

証明　命題 63 による． ■

命題 66 $a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ で，x が a に自由に現れないとき，任意の定付値 Φ，変付値 ν と $s \in S_\sigma, t \in S_\tau$ に対して，次のことが成り立つ．

$$\Big(\Phi^*\big((x \, \breve{o} \pi_\sigma \, a \triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \, \exists_t \, s \iff (\Phi^* a)\nu \, \exists_t \, s$$

$$\begin{aligned} &\Big(\Phi^*\big((\mathrm{one}_\tau \, \forall \kappa_\tau \, x \, \breve{o} \pi_\sigma \, a \triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \, \exists_t \, s \\ &\iff \text{任意の } u \in S_\tau \text{ に対して } (\Phi^* a)\nu \exists_u s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Big(\Phi^*\big((\mathrm{one}_\tau \, \exists \kappa_\tau \, x \, \breve{o} \pi_\sigma \, a \triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \, \exists_t \, s \\ &\iff (\Phi^* a)\nu \exists_u s \text{ なる } u \in S_\tau \text{ が存在する} \end{aligned}$$

証明　第一式の証明

$$\Big(\Phi^*\big((x \, \breve{o} \pi_\sigma \, a \triangle)\Omega x\big)\Big)\nu = \big((\Phi^* x \, \breve{o} \pi_\sigma \, \Phi^* a \triangle)\Omega x\big)\nu$$

である．算法 Ωx の定義，意味写像定理により

$$
\begin{aligned}
&\big((\Phi^* x \,\check{o}\pi_\sigma\, \Phi^* a\triangle)\Omega x\big)\nu \,\exists_t\, s \\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^* x \,\check{o}\pi_\sigma\, \Phi^* a\triangle)((x/s)\nu)\big)(\kappa_\tau/t) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (s \,\check{o}\pi_\sigma\, (\Phi^* a)\nu\triangle)(\kappa_\tau/t) = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu\triangle)\big((\pi_\sigma/s)(\kappa_\tau/t)\big) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu \,\exists_t\, s
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

第二式の証明

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Phi^*\big((\mathrm{one}_\tau \,\forall\kappa_\tau\, x \,\check{o}\pi_\sigma\, a\triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \\
&= \big((\Phi^*(\mathrm{one}_\tau) \,\forall\kappa_\tau\, \Phi^* x \,\check{o}\pi_\sigma\, \Phi^* a\triangle)\Omega x\big)\nu
\end{aligned}
$$

である．算法 Ωx の定義，意味写像定理により

$$
\begin{aligned}
&\big((\Phi^*(\mathrm{one}_\tau) \,\forall\kappa_\tau\, \Phi^* x \,\check{o}\pi_\sigma\, \Phi^* a\triangle)\Omega x\big)\nu \,\exists_t\, s \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\mathrm{one}_\tau) \,\forall\kappa_\tau\, \Phi^* x \,\check{o}\pi_\sigma\, \Phi^* a\triangle)((x/s)\nu) = 1 \\
&\Longleftrightarrow 1_\tau \,\forall\kappa_\tau\, s \,\check{o}\pi_\sigma\, (\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\Longleftrightarrow |\{u \in S_\tau \mid 1_\tau \,\exists_\tau\, u, \big(s \,\check{o}\pi_\sigma\, (\Phi^* a)\nu\triangle\big)(\kappa_\tau/u) = 0\}|_\tau \in [00] \\
&\Longleftrightarrow |\{u \in S_\tau \mid 1_\tau \,\exists_\tau\, u, (\Phi^* a)\nu \,\exists_u\, s \text{ でない } \}|_\tau \in [00] \\
&\Longleftrightarrow u \in S_\tau \text{ ならば } (\Phi^* a)\nu \,\exists_u\, s
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

第三式も同様にして示される． ■

命題 67 $t \in A_{\varepsilon_\tau}, a \in A_{\varepsilon_\sigma} \cup A_{\delta_\sigma}, x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}$ で，x が a, b に自由に現れないとき，任意の定付値 Φ，変付値 ν と $s \in S_\sigma, u \in S_\tau$ に対して，次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Phi^*\big((t \,\check{o}\kappa_\tau\, x \,\check{o}\pi_\sigma\, a\triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \,\exists_u\, s \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu \,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\, s
\end{aligned}
$$

証明　以下の計算により分かる．

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Phi^*\big((t\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x\big)\Big)\nu\,\exists_u\,s\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^* t\,\check{o}\kappa_\tau\,\Phi^* x\,\check{o}\pi_\sigma\,\Phi^* a\triangle)\Omega x\big)\nu\,\exists_u\,s\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* t\,\check{o}\kappa_\tau\,\Phi^* x\,\check{o}\pi_\sigma\,\Phi^* a\triangle)\big((x/s)\nu\big)=1\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,s\,\check{o}\pi_\sigma\,(\Phi^* a)\nu\triangle=1\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^* a)\nu\triangle\big)\big((\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)(\pi_\sigma/s)\big)=1\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu\,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\,s
\end{aligned}
$$

■

命題 68 $t\in A_{\varepsilon_\tau}, a\in A_{\varepsilon_\sigma}\cup A_{\delta_\sigma}, x\in \mathrm{Var}_{\varepsilon_\sigma}, l\in K_\sigma, P\in \mathcal{P}^{\kappa_\tau}K\cap\mathcal{P}^{l}K, f\in A_P, \lambda\in\neg\mathfrak{P}_\sigma\cup\mathfrak{P}_\sigma$ で，x が t, a, f に自由に現れないとき，次のことが成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&t\,\check{o}\kappa_\tau\,a\,\lambda l\,f \asymp t\,\check{o}\kappa_\tau\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x\,\lambda l\,f\\
&a\,\lambda l\,t\,\check{o}\kappa_\tau\,f \asymp_\Phi (n\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x\,\lambda l\,t\,\check{o}\kappa_\tau\,f
\end{aligned}
$$

ただし，定付値 Φ と定数 $n\in\mathrm{Con}_{\varepsilon_\tau}$ は $\Phi n=t_0$ をみたすとする．

証明　第一式の証明

$\lambda\in\mathfrak{P}_\sigma$ の場合を示す．$\lambda=\mathfrak{p}$ と書く．任意の定付値 Φ，変付値 ν に対して，

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Phi^*\big(t\,\check{o}\kappa_\tau\,(t\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x\,\mathfrak{p}l\,f\big)\Big)\nu\\
&=(\Phi^* t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,\Big(\Phi^*\big((t\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x\big)\Big)\nu\,\mathfrak{p}l\,(\Phi^* f)\nu
\end{aligned}
$$

である．$(t\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x$ を c とおくと，任意の $\theta\in(P-\{\kappa_\tau,l\})\rightsquigarrow S$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\bigg((\Phi^* t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,\Big(\Phi^*\big((t\,\check{o}\kappa_\tau\,x\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)\Omega x\big)\Big)\nu\,\mathfrak{p}l\,(\Phi^* f)\nu\bigg)\theta=1\\
&\Longleftrightarrow \big((\Phi^* t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,(\Phi^* c)\nu\,\mathfrak{p}l\,(\Phi^* f)\nu\big)\theta=1\\
&\Longleftrightarrow |\{s\in S_\sigma \mid (\Phi^* c)\nu\,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\,s, \big((\Phi^* f)\nu\big)\big((l/s)(\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)\theta\big)=1\}|_\sigma\in\mathfrak{p}
\end{aligned}
$$

である．ここで，命題 67 により

$$
(\Phi^* c)\nu\,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\,s \Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu\,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\,s
$$

なので，

$$\begin{aligned}
&|\{s \in S_\sigma \mid (\Phi^* c)\nu \,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\, s, \big((\Phi^* f)\nu\big)\big((l/s)(\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)\theta\big) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists_{(\Phi^* t)\nu}\, s, \big((\Phi^* f)\nu\big)\big((l/s)(\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)\theta\big) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\iff \big((\Phi^* t)\nu \,\breve{o}\kappa_\tau\, (\Phi^* a)\nu \,\mathfrak{p} l\, (\Phi^* f)\nu\big)\theta = 1 \\
&\iff \Big(\big(\Phi^*(t \,\breve{o}\kappa_\tau\, a \lambda l\, f)\big)\nu\Big)\theta = 1
\end{aligned}$$

である．θ は任意なので

$$\big(\Phi^*(t \,\breve{o}\kappa_\tau\, a \lambda l\, f)\big)\nu = \Big(\Phi^*\big(t \,\breve{o}\kappa_\tau\, (t \,\breve{o}\kappa_\tau\, x \,\breve{o}\pi_\sigma\, a \triangle)\Omega x \,\mathfrak{p} l\, f\big)\Big)\nu$$

が成り立つ．

$\lambda \in \neg\mathfrak{P}_\sigma$ の場合も同様である．

第二式の証明

$\lambda \in \mathfrak{P}_\sigma$ の場合を示す．$\lambda = \mathfrak{p}$ と書く．$\Phi n = t_0$ をみたす定付値 Φ，定数 $n \in \mathrm{Con}_{\varepsilon_\tau}$ と，任意の変付値 ν をとる．

$$\begin{aligned}
&\Big(\Phi^*\big((n \,\breve{o}\kappa_\tau\, x \,\breve{o}\pi_\sigma\, a \triangle)\Omega x \,\lambda l\, t \,\breve{o}\kappa_\tau\, f\big)\Big)\nu \\
&= \Big(\Phi^*\big((n \,\breve{o}\kappa_\tau\, x \,\breve{o}\pi_\sigma\, a \triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \,\lambda l\, (\Phi^* t)\nu \,\breve{o}\kappa_\tau\, (\Phi^* f)\nu
\end{aligned}$$

である．

$(n \,\breve{o}\kappa_\tau\, x \,\breve{o}\pi_\sigma\, a \triangle)\Omega x$ を d とおくと，任意の $\theta \in (P - \{\kappa_\tau, l\}) \rightsquigarrow S$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\bigg(\Big(\Phi^*\big((n \,\breve{o}\kappa_\tau\, x \,\breve{o}\pi_\sigma\, a \triangle)\Omega x\big)\Big)\nu \,\lambda l\, (\Phi^* t)\nu \,\breve{o}\kappa_\tau\, (\Phi^* f)\nu\bigg)\theta = 1 \\
&\iff \big((\Phi^* d)\nu \,\mathfrak{p} l\, (\Phi^* t)\nu \,\breve{o}\kappa_\tau\, (\Phi^* f)\nu\big)\theta = 1 \\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid (\Phi^* d)\nu \,\exists_{t_0}\, s, \big((\Phi^* f)\nu\big)\big((\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)(l/s)\theta\big) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

である．ここで，命題 67 と $\Phi n = t_0$ であることから，

$$\begin{aligned}
(\Phi^* d)\nu \,\exists_{t_0}\, s &\iff (\Phi^* a)\nu \,\exists_{(\Phi^* n)\nu}\, s \\
&\iff (\Phi^* a)\nu \,\exists_{t_0}\, s
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
&|\{s \in S_\sigma \mid (\Phi^* d)\nu \,\exists_{t_0}\, s, \big((\Phi^* f)\nu\big)\big((\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)(l/s)\theta\big) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p} \\
&\iff |\{s \in S_\sigma \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists_{t_0}\, s, \big((\Phi^* f)\nu\big)\big((\kappa_\tau/(\Phi^* t)\nu)(l/s)\theta\big) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，

$$\Big(\big(\Phi^*(a\,\lambda l\,t\,\check{o}\kappa_\tau\,f)\big)\nu\Big)\theta = 1$$
$$\Longleftrightarrow \big((\Phi^*a)\nu\,\lambda l\,(\Phi^*t)\nu\,\check{o}\kappa_\tau\,(\Phi^*f)\nu\big)\theta = 1$$
$$\Longleftrightarrow |\{s \in S_\sigma \mid (\Phi^*a)\nu\,\exists_{t_0}\,s, \big((\Phi^*f)\nu\big)\big((\kappa_\tau/(\Phi^*t)\nu)(l/s)\theta\big) = 1\}|_\sigma \in \mathfrak{p}$$

である． ■

6 日本語に即した説明

日本語を使うとき，私たちの心で何が起こっているのかを観察する．そして，状況相をもつ格言語の理論から導かれる結論が，観察結果と符合することを確かめることが，この節の目的である．

まず，自然言語と心言語（ここでは状況相をもつ格言語）との関係を述べる必要がある．基本的な仮説として，次の仮説を設ける．

- 自然言語には観念（心言語の用元）が何らかの変形を受けた後に表出している．

次に，表出の原則を述べる[6]．

- 単体定数は名詞や代名詞に置き換える．
- 算法記号 $\check{o}\pi_\nu$ $(\nu = \sigma, \tau)$ は主語を表す格助詞の「が」あるいは係り助詞の「は」に置き換える．
- 算法記号 $\triangle$ は「だ」「です」「である」などの断定の意味を表す語に置き換える．
- 括弧は取り除くか音素間隙や句読点などの区切り記号に置き換える．
- 算法記号 $\check{o}k$ $(k \in K)$ は格助詞に置き換える．
- 用定数は動詞・形容詞・形容動詞の終止形に置き換える．
- $\mathfrak{p}$ が下方区間（$\neq P_\nu, \emptyset$）なら，$\neg\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{p}$ は上限語に置き換える．特に $\neg[00]$ は「すべて」を意味する語に置き換える．
- 変数および変数に施された算法記号は空語に置き換える．
- 算法記号 Ωx は「物・者」を意味する「もの」に置き換える．

[6]参考文献 [1] を参照のこと．

参考文献 [1] で行われていることと同様の議論が，状況相をもつ格言語においても展開される．

この節では，状況相をもつ格言語を用いて日本語文を分析するが，特に状況相をもつ格言語に特徴的な部分について述べる．

例 1 次の文を考える．

来年学生は皆学生である

私たちはこの文がいかにも恒真であると思う．一方で，次の A の元を考える．

$$\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{a}\,\forall\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)$$

ただし，t は τ 相の単体定数，a は σ 相の単体定数である．

これは命題 59 により恒真である．

この元を，節の始めに挙げた表出の原則に従って変形する．t は「来年」，a は「学生」に置き換えれば，全体は「来年学生は皆学生である」という文になる．

「来年学生は皆学生である」という文が私たちに（直感的に）恒真であると思われることと，A の元 $\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{a}\,\forall\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)$ が（定義 13 の意味で）恒真であることが対応している． □

例 2 次のような文について考える．

学生は皆来年学生である

私たちはこの文を解釈するとき，今学生である者が来年も学生であるとは限らないと考えるだろう．

このことは状況相をもつ格言語ではどのように説明されるだろうか．

次のような A の元を考える．

$$\mathrm{a}\,\forall\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\triangle)$$

ただし，t は τ 相の単体定数，a は σ 相の単体定数である．

この元は恒真でない．

この元が表出の原則に従って変形され，「学生は皆来年学生である」という文となって表出される．ただし，t, a はそれぞれ「来年」「学生」に置き換える．

私たちが「学生は皆来年学生である」と聞いたとき，この文が（直感的な意味で）恒真であると思われない，という事実は，$\mathrm{a}\,\forall\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\triangle)$ が（定義 13 の意味で）恒真でないことに対応している． □

例 3 次のような文を考える．

学生は皆学生である

この文を話したり聞いたりするとき，私たちの心では何が起こっているかを観察する．

1 節ではこの文が真であるように思われると述べた．しかし，前の文を踏まえれば，学生がいつも学生であるとは限らない，と考えるかもしれない．差し当たり判断を保留し，状況相をもつ格言語による説明を試みる．

次にすべきことは，この文が A のどの元が表出したものであるかを述べることである．次の A の元を考える．

$$\alpha\,\forall\pi_{\sigma}\,\alpha\triangle \tag{4}$$

$$\chi\,\breve{o}\kappa_{\tau}\,(\alpha\,\forall\pi_{\sigma}\,\alpha\triangle) \tag{5}$$

$$\alpha\,\forall\pi_{\sigma}\,(\chi\,\breve{o}\kappa_{\tau}\,\alpha\triangle) \tag{6}$$

ただし，上で α は σ 相の単体定数で，χ は τ 相の単体変数である．

上の三つはいずれも，表出の原則に従って「学生は皆学生である」として表出する．

命題 58，命題 57 により，(4) と (5) は恒真であるが，(6) は恒真でない．

前の例文とは異なり，A の元として三つの候補が出たことをどう解釈するか，という問題が生ずる．

この問題に対して，以下のような解釈を与える．

「学生は皆学生である」という文を私たちが話したり聞いたりするとき，ある人の神経系内には (4) があり，他のある人の神経系内には (5) があり，またある人の神経系内には (6) がある．

神経系内に (4) や (5) を持っている人はこの文を恒真であるように感じ，他方，神経系内に (6) を持っている人は恒真でないように感じる． □

注意　A の異なる元が自然言語の同じ文として表出しうることは，理論の欠陥ではない．言葉を解釈するとは，ある人の神経系にある心言語の元が，自然言語の表現を媒介して，他の人の神経系で再び心言語の元として構成されることである．表出の仕方は一対一ではないから，発話者の脳内にある A の元（発話者の意図）と，それを聞いた人の脳内にある A の元（聞き手の解釈）が同一であることは保証されない．日常においては，発話者の意図と聞き手の解釈が食い違うことはありふれたことだが，上の例ではこのことが表されているといえる．

例 4 次の文を考える．

来年太郎は学生だ

太郎は来年学生だ

私たちはこれらの真偽がつねに一致するように思う．

続いて，次の A の元を考える．

$$(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{b}\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle))$$
$$(\mathrm{b}\,\check{o}\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle))$$

ただし，t は τ 相の単体定数，a, b は σ 相の単体定数である．

命題 62 により，$(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{b}\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)) \asymp (\mathrm{b}\,\check{o}\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle))$ が成り立つ．

第一の元を表出の原則により変形すると「来年太郎は学生だ」となり，第二の元は「太郎は来年学生だ」となる．ただし，t, a, b はそれぞれ「来年」「学生」「太郎」に置き換える．

「来年太郎は学生だ」と「太郎は来年学生だ」の真偽が一致すると私たちに感じられることと，$(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{b}\,\check{o}\pi_\sigma\,a\triangle)) \asymp (\mathrm{b}\,\check{o}\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle))$ であることが対応している． □

例 5 次の文を考える．

来年学生であるものは皆来年学生である

私たちはこの文が恒真であるように思う．

一方，次の A の元を考える．

$$(\mathrm{x}\,\check{o}\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle))\Omega\mathrm{x}\,\forall\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle)$$

ただし，t は τ 相の単体定数，a は σ 相の単体定数である．

命題 65 により，これは恒真である．

t, a をそれぞれ「来年」「学生」に置き換えるとすると，この元は表出の原則に従って変形され「来年学生であるものは皆来年学生である」という文となる．

「来年学生であるものは皆来年学生である」という文が恒真であると私たちに思われることと，$(\mathrm{x}\,\check{o}\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle))\Omega\mathrm{x}\,\forall\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle)$ が恒真であることが対応している． □

例 6 例 1，例 2 ではそれぞれ，$\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,(a\,\forall\pi_\sigma\,a\triangle), a\,\forall\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\check{o}\kappa_\tau\,a\triangle)$ が「来年学生は皆学生である」「学生は皆来年学生である」という文として表出すると述べた．

命題 68 によれば

$$\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{l}\,\mathrm{a}\triangle \asymp \mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{x}\,\breve{o}\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)\Omega\mathrm{x}\,\lambda\mathrm{l}\,\mathrm{a}\triangle$$
$$\mathrm{a}\,\lambda\mathrm{l}\,\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\triangle \asymp_\Phi (\mathrm{n}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{x}\,\breve{o}\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)\Omega\mathrm{x}\,\lambda\mathrm{l}\,\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\triangle$$

が成り立つ．ただし，定付値 Φ と定数 $\mathrm{n} \in \mathrm{Con}_{\varepsilon_\tau}$ は $\Phi\mathrm{n} = \mathrm{t}_0$ をみたすとする．

この命題が，今の例で何を表しているかを説明する．

$\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{a}\,\forall\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)$ が

来年学生は皆学生である

に変形されるのに対して，$\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,(\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{x}\,\breve{o}\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)\Omega\mathrm{x}\,\lambda\mathrm{l}\,\mathrm{a}\triangle$ は

来年　来年学生であるもの　は皆学生である

に変形される．命題の第一式は，これらの真偽が一致することを示している．

$\mathrm{a}\,\forall\pi_\sigma\,(\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\triangle)$ が

学生は皆来年学生である

に変形されるのに対して，$(\mathrm{n}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{x}\,\breve{o}\pi_\sigma\,\mathrm{a}\triangle)\Omega\mathrm{x}\,\lambda\mathrm{l}\,\mathrm{t}\,\breve{o}\kappa_\tau\,\mathrm{a}\triangle$ は

今学生であるもの　は皆来年学生である

に変形される．ここで $\Phi\mathrm{n} = \mathrm{t}_0$ なる条件は，n を「今」を指す語に置き換えることに対応している．命題の第二式は，これらの真偽が一致することを示している．

第二式は恒真関係 $\preccurlyeq$ ではなく Φ 真関係 $\preccurlyeq_\Phi$ に関する式であるが，これと同等のことを $\preccurlyeq$ で表す方法は今のところ見つかっていない． □

謝辞

指導していただいた指導教官の五味健作先生に感謝します．協力していただいたゼミの皆さんに感謝します．

参考文献

[1] 五味健作『数理心理学』
WWW 出版（`http://homepage3.nifty.com/gomiken/`）

[2] 堀川智史『修飾変数が任意個の可変子をもつ形式言語の基礎理論』
東京大学平成 18 年度修士論文