平成20年度

修士論文題目

一階述語論理における切断のモデルの存在定理とその応用

学生証番号: 45-076031

タカハシ　カズヒロ
高橋　和大

要旨

一階述語言語は数学基礎論において欠かせないものであり、多くの研究者が証明論・意味論ともに研究を進め、多くの成果を挙げている。その中でも特に重要だとされる成果は、ゲーデルによる完全性定理であろう。

完全性とは、ある与えられた論理的公理と推論規則の組から証明できる論理式全体と、恒真である論理式全体が一致するという性質である。一階述語論理の完全性定理により、数学基礎論は恒真である論理式は証明可能であるという保証を得ることになった。ゲーデル以後も完全性についての研究は進められ、多くの別証明も与えられている。また、より一般化された、一階述語論理において任意の数学的公理 X に対して、X から証明可能な論理式全体と X のあらゆるモデルにおいて真である論理式全体が一致することも示されている。論文内ではこちらを完全性と呼んでいる。

本論文では「一階述語論理における切断のモデルの存在定理」を示す。集合 A の部分集合対 (X,Y) が $\mathrm{A}^* = \bigcup_{\mathrm{n}\geq 0} \mathrm{A}^{\mathrm{n}}$ 上の関係 $\preceq$ に関する切断であるとは

$$\alpha \subseteq \mathrm{X}, \beta \subseteq \mathrm{Y} \Longrightarrow \alpha \not\preceq \beta$$

を満たすことを言う。これは、有名な実数論におけるデデキントの切断にちなんでいる。一階述語論理において、切断におけるモデル、すなわち X は真となり Y は偽となるようなモデルが必要な条件下で存在するというのがこの定理の主張である。この定理の最初の重要な効用が、完全性定理の証明である。

恒真な論理式が証明可能であることを示すために証明不可能な論理式 $\alpha \to \beta$ をとると、実は、集合対としての (α, β) は証明可能であるという関係 $\preceq_{\mathrm{R,D}}$ についての切断となっている。「一階述語論理における切断のモデルの存在定理」によってこの切断にモデルが存在することが分かり、そのモデルこそ $\alpha \to \beta$ が真とならないモデルに他ならない。よって、$\alpha \to \beta$ は恒真でないことが分かり、完全性定理が示される。

しかし、本定理の効用は完全性定理の証明だけではない。一階述語論理における、無矛盾集合のモデルの存在定理も本定理から示される。ここでいうモデルとは、切断のモデルではなく通常使われる集合のモデルのことである。この場合、無矛盾集合 X と空集合 $\emptyset$ の組 $(\mathrm{X}, \emptyset)$ が恒真関係についての切断になる。

このように、完全性定理および無矛盾モデルの存在定理の証明に、切断は自然に現れる。これを踏まえると本定理の一番の効用は、モデルの存在定理と完全性定理を統括している点だと言える。

本論文では、一階述語論理における切断のモデルの存在定理、および定理を用いた完全性定理、無矛盾集合のモデルの存在定理の証明について述べる。

謝辞

ゼミの皆さん、特に、多くの助言をいただいた高岡洋介さん、指導していただいた五味健作先生に、心から感謝いたします。

各章について

本論文の主定理は「一階述語論理における切断のモデルの存在定理」である。1 章では主定理の証明に入る前に、定義・基本定理を挙げる。これは、論理学では複数の定義の方法があり、どの立場で論ずるのかをはっきりさせることが主目的である。この論文においては参考文献 [1] の定義法をとる。また、基本的な定理についての証明を省略する目的もある。引用した諸定理についての証明は参考文献 [1] に記載されている。これは以下の章でも同様であり、引用した場合はその旨を記す。

2 章では主定理である「一階述語論理における切断のモデルの存在定理」を扱う。まずその厳密な形での提起、補助定理の証明に続き、主定理の証明を行う。

3・4 章では、要旨で述べたことを厳密な形で再度述べる。つまり、主定理を用いた一階述語論理における完全性定理の証明と、モデルの存在定理の証明である。3 章では一階述語論理における文式の弱完全性を示すことに留まり、一階述語論理の文の完全性については追及しない。ただし、文式の弱完全性が文の完全性にどのような関係があるのかは述べる。

4 章では一階述語論理におけるモデルの存在定理について述べる。はじめに条件付きのモデルの存在定理を示し、その後、条件無しのモデルの存在定理を示す。

目次

1 基本概念

ここで挙げる定義・定理は参考文献 [1] による。

1.1 代数学

定義 1 (算法)

集合 A の直積 A^n の部分集合 D から A への写像 α を A 上の**算法**と呼び (n=1,2,$\cdots$)、D,αD をそれぞれ α の**定義域・値域**と呼ぶ。また、D$\neq\emptyset$ のとき n を α の**項数**と呼ぶ。定義域を Domα で表し、値域を Imα で表す。Domα=A^n のとき、α は**汎算法**であるとか、α は**全域的**であると言う。

自然数 n が α の項数であるとき、α は n **項算法**であると言う。ただし、一項算法は**単項算法**とも呼ぶ。以下、n_λ で α_λ の項数を表す。

さらに、A の部分集合 B が

$$\alpha(B^n \cap \mathrm{Dom}\alpha) \subseteq B$$

なる条件を満たすとき、B **は** α **で閉じている**とか、α **は** B **を閉ざす**と言う。このときまた、$\alpha|_{B^n \cap \mathrm{Dom}\alpha}$ は B 上の算法とみなせる。そうみなしたものを α **の** B **への制限**と呼ぶ。

定義 2 (代数系)

集合 A とその上の算法族の組 $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の組 (A,$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$) を**代数系**、または**系**と呼び、A,Λ,$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のことをそれぞれこの代数系の**台**（または**台集合**)、**算法記号系**、**代数構造**と呼ぶ。また、すべての $\lambda\in\Lambda$ について α_λ が汎算法であるとき、この代数系を**汎代数系**と呼んだり、この代数系は**全域的**であると言う。さらに、Λ を算法記号系とする代数系のことを Λ **代数系**と呼ぶ。

以下、誤解がなければ次のような略記法を用いる。まず、α_λ を算法記号 λ で表す。また、代数系をその台のみで表す。

定義 3 二つの代数系 A,B が共通の算法記号系 Λ を持ち、各 $\lambda\in\Lambda$ に対応する A,B の算法が共通の項数を持つとき、A と B は**同類**の代数系であると言う。

定義 4 (部分系)

(A,$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$) を代数系とする。算法記号系 Λ をその部分集合 M に制限すれば、代数系 (A,$(\alpha_\mu)_{\mu\in M}$) が出来る。これを元の代数系の**算部分系**と呼び、A_M で表す。

A の部分集合 B がすべての $\lambda\in\Lambda$ について α_λ で閉じているとき、α_λ の B への制限 β_λ によって代数系 (B,$(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$) が出来る。これを元の代数系の**台部分系**と呼ぶ。

算部分系の台部分系のことを、元の代数系の**部分系**と呼ぶ。

定理 1 A はそれ自身が A の台部分系であり、A の台部分系の交わりは A の台部分系である。

定義 5 (生成系)

上定理によれば、A の任意の部分集合 S に対してそれを含む最小の台部分系が存在する。S を含む A の台部分系全ての交わりがそれである。これを A における S の算包とか、A **の** S **によって生成される台部分系**と呼び、[S] で表す。

また A=[S] であるとき、A **は** S **で生成される**とか、S **を** A **の生成系**であると言う。

定義 6 (圏列)

代数系 A の部分集合 S に対して、A の部分集合 $S_n(n = 0, 1, \cdots)$ を次のように帰納的に定め、S_n を S **の** n **圏**と呼び、$S_0, S_1, \cdots$ を S **の圏列**と呼ぶ。

すなわち、まず $S_0 = S$ と定め、n≥1 であって $S_0, \cdots, S_{n-1}$ が定められたとき、

$$S_n = \{\alpha_\lambda(a_1, \cdots, a_{n_\lambda}) |\ \lambda \in \Lambda,\ (a_1, \cdots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\alpha_\lambda,\ a_i \in S_{l_i}(i = 1, \cdots, n_\lambda),\ n = \Sigma_{i=1}^{n_\lambda} l_i + 1\}$$

と定める。

このとき、$[S] = \bigcup_{i \geq 0} S_n$ が成り立つ。

定義 7 (擬写・準写)

$(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, $(B,(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を同類の代数系とする。

A から B への写像 f が次の条件を満たすとき、f を**擬写**と呼ぶ。

$$(a_1, \cdots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\alpha_\lambda \text{のとき} (fa_1, \cdots, fa_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\beta_\lambda \text{であり、} f(\alpha_\lambda(a_1, \cdots, a_{n_\lambda})) = \beta_\lambda(fa_1, \cdots, fa_{n_\lambda})$$

また、擬写 $f \in A \to B$ がさらに次の条件を満たすとき、f を**準写**と呼ぶ。

$$(a_1, \cdots, a_{n_\lambda}) \in A^{n_\lambda},\ (fa_1, \cdots, fa_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\beta_\lambda \text{なら} (a_1, \cdots, a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\alpha_\lambda$$

全単射の準写を**同写**と呼ぶ。A から B への同写が存在するとき、A **は** B **に同形**であると言う。

定義 8 (型付代数系)

同類の代数系 A と T および準写 $\sigma \in A \to T$ から成る三つ組 (A,T,σ) を**型付代数系**と呼び、A,T,σ をそれぞれこの型付代数系の**台**（または**台代数系**)、**型代数系**、**型写像**と呼ぶ。

また、$a \in A$ に対して σa を a **の型**と呼び、逆に $t \in T$ に対して $\sigma^{-1}t$ の元を t **型の元**と呼ぶ。

以下、誤解の恐れのない場合は型代数系、型写像の一方または両方を省略する。

定義 9 (保型写像)

同じ型代数系を持つ型付代数系は互いに**同型**であると言う。そして、同型の型付代数系 (A,T,σ),(B,T,τ) に対して、$a \in A,\ b \in B$ の型が等しいとき、a **と** b **は同型**であると言う。

さらに、A の部分集合 S から B への写像 f で、$\tau f = \sigma|_S$ を満たすものを**保型写像**と呼ぶ。特に、A から B への保型写像で準写であるものを**保型準写**と呼び、保型写像で同写であるものを**保型同写**と呼ぶ。

定義 10 (普遍型付代数系)

型付代数系 (A,T,σ) と、A の部分集合 S が次の二条件を満たすとする。

1. A=[S]
2. (A', T, σ') が型付代数系であって $\varphi \in A \to A'$ が保型写像であれば、
   φ は保型準写 $f \in A \to A'$ に拡張される。

このとき、四つ組 (A,T,σ,S) を**普遍型付代数系**と呼び、S を**素元系**、S の元を**素元**と呼ぶ。

以下、誤解の恐れのない場合には普遍型付代数系を台だけで表したり、素元系を省略する。

特に T が単元集合を台とし、さらに汎代数系であるときには、A もまた汎代数系となり、準写 $\sigma \in A \to T$ は一意に決まる。そこで、この仮定の下で条件 1,2 を満たす (A,S) を普遍汎代数系と呼んだり、A は S **を素元系とする普遍汎代数系**と言う。

定理 2 (普遍型付代数系の存在と一意性定理)

S を集合、T を代数系とし、$\tau \in \mathrm{S} \to \mathrm{T}$ とする。このとき、普遍型付代数系 (A,T,σ,S) で $\sigma|_{\mathrm{S}} = \tau$ を満たすものが存在する。

こういう普遍型付代数系は次の意味で一意に決まる。すなわち、普遍型付代数系 $(\mathrm{A}', \mathrm{T}, \sigma', \mathrm{S})$ も $\sigma'|_{\mathrm{S}} = \tau$ を満たせば、保型同写 $\mathrm{f} \in \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ で $\mathrm{f}|_{\mathrm{S}} = \mathrm{id}_{\mathrm{S}}$ なるものが唯一つ存在する。

定理 3 (有基代数系)

(A,$(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) を代数系とする。このとき、A の部分集合 S についての次の二条件 1,2 は同等であり、これらを満たす S は高々一つしか存在しない。

1. S は A の生成系であり次の二条件を満たす。
   1a. S の元は $\alpha_\lambda(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})$ なる形に表せない。
   1b. A の元は $\alpha_\lambda(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})$ なる形に、高々一通りに表される。
2. S は次の二条件を満たす。
   2a. A は S の n 圏 $\mathrm{S}_\mathrm{n}(\mathrm{n} = 0, 1, \cdots)$ の直和である
   2b. $\mathrm{n} = 1, 2, \cdots$ に対して、S_n の元 a を S_n の定義に従って

$$\mathrm{a} = \alpha_\lambda(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda}) \qquad (\lambda \in \Lambda,\ \mathrm{a}_\mathrm{i} \in \mathrm{S}_{\mathrm{l}_\mathrm{i}}(\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n}_\lambda),\ \mathrm{n} = \Sigma_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}_\lambda} \mathrm{l}_\mathrm{i} + 1)$$

と表すときの $\lambda, \mathrm{a}_\mathrm{i}, \mathrm{l}_\mathrm{i}$ は、a に対して一意に決まる。

代数系 A とその部分集合 S が上の同等な二条件を満たすとき、A は S 上の有基代数系であるとか、(A,S) は**有基代数系**であるとか言い、S を A の**基**あるいは**基底**と呼ぶ。

(A,S) が有基代数系のとき、条件 2b により、A の各元 a に対して $\mathrm{a} \in \mathrm{S}_\mathrm{n}$ なる非負整数 n が唯一つあるから、この n を a の S に関する**階数**を呼び rank a あるいは rank_S a で表す。

定理 4 型付代数系 (A,T,σ) の台 A の部分集合 S についての二条件 1,2 は同等であり、この同等な二条件を満たす S は高々一つしか存在しない。

1. (A,T,σ,S) は普遍型付代数系である。
2. (A,S) は有基代数系である。

これにより、(A,T,σ,S) を普遍型付代数系とするとき、A の各元 a に対して階数を定義することが出来る。すなわち、有基代数系 (A,S) における階数を a の階数とする。この場合も同様に a の S に関する階数と呼び、rank a で表す。

定義 11 (現れ)

(A,$(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) を代数系とする。A の二元 a,b に対して $a = \alpha_\lambda(\cdots, b, \cdots)$ なる λ があるとき、b **は** a **に直接現れる**と言い、b$\prec$ a で表し、b$\prec$ a または b=a であることを b$\preceq$ a で表す。

A の元の列 $\mathrm{b}_0 . \mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_\mathrm{n}$ $(\mathrm{n} \geq 0)$ で、

$$\mathrm{b} = \mathrm{b}_\mathrm{n} \preceq \cdots \preceq \mathrm{b}_1 \preceq \mathrm{b}_0 = \mathrm{a}$$

なる条件を満たすものが存在するとき、b **は** a **に現れる**と言い、b$\preceq\preceq$ a で表す。また、上記のような列 $(\mathrm{b}_\mathrm{i})_{\mathrm{i}=0,1,\cdots,\mathrm{n}}$ を a **への** b **の現れ**と呼び、A の元 a と部分集合 B に対し、B の部分集合 B^a を次のように定義する。

$$\mathrm{B}^\mathrm{a} = \{\mathrm{b} \in \mathrm{B} |\ \mathrm{b} \preceq\preceq \mathrm{a}\}$$

また、A の元 a と Λ の元 λ が $(\mathrm{Im}\alpha_\lambda)^{\mathrm{a}} \neq \emptyset$ を満たすとき、λ **は** a **に現れる**と言う。

定義 12 (自由な現れ)

(A,S) を、$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を代数構造とする有基代数系であって、その算法記号系 Λ は、基底 S とある集合 Γ の直和 $\Gamma \amalg \mathrm{S}$ 上の普遍半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{S})^+ = \bigcup_{\mathrm{n}\geq 1}(\Gamma \amalg \mathrm{S})^{\mathrm{n}}$ に含まれるものとする。半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{S})^+$ において $\lambda \in \Lambda$ に現れる S の元の全体を S^λ で表す。以下、$\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A},\ \mathrm{s} \in \mathrm{S}$ とする。

1. a への s の現れ $(\mathrm{s_i})_{\mathrm{i}=0,\cdots,\mathrm{n}}$ が $\mathrm{s} \in \mathrm{S}^\lambda$ なる任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{\mathrm{s_0}, \cdots, \mathrm{s_n}\} \cap \mathrm{Im}\alpha_\lambda = \emptyset$ を満たすとき、**この現れは自由である**と言う。

2. a への s の自由な現れがあるとき、s **は** a **に自由に現れる**と言い、このことを $\mathrm{s} \ll \mathrm{a}$ で表す。また、S の部分集合 $\mathrm{S}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{free}}$ を $\mathrm{S}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{free}} = \{\mathrm{s} \in \mathrm{S} |\ \mathrm{s} \ll \mathrm{a}\}$ で表す。

3. a への s の現れ $(\mathrm{s_i})_{\mathrm{i}=0,\cdots,\mathrm{n}}$ が $\mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{S}^\lambda \neq \emptyset$ なる任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\{\mathrm{s_0}, \cdots, \mathrm{s_n}\} \cap \mathrm{Im}\alpha_\lambda = \emptyset$ を満たすとき、**この現れは** b **から自由である**と言う。

4. a への s の自由な現れがどれも b から自由であるとき、a **において** s **は** b **から自由である**と言う。

これは a への s の現れが存在しない、つまり s が a に自由に現れない場合も含む。

定理 5 s が a に現れないなら、s は a に自由に現れない

定理 6 (算法と自由)

(1) $\mathrm{a} = \alpha_\lambda(\mathrm{a_1}, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda}) \in \mathrm{A}$ とするとき、

$$\mathrm{S}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{free}} = \bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}_\lambda} \mathrm{S}^{\mathrm{a_k}}_{\mathrm{free}} - \mathrm{S}^\lambda$$

(2) $\mathrm{a} = \alpha_\lambda(\mathrm{a_1}, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda}) \in \mathrm{A},\ \mathrm{s} \in \mathrm{S},\ \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ とするとき、a において s が b から自由であるためには、

s が a に自由に現れないか次の二条件の成り立つことが必要十分条件である。

1. 各 $\mathrm{a_k}$ において s は b から自由である $(\mathrm{k} \in \{1, \cdots, \mathrm{n}_\lambda\})$.
2. $\mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{S}^\lambda = \emptyset$.

定義 13 (代入)

$(\mathrm{A},\mathrm{T},\sigma,\mathrm{S})$ を普遍型付代数系とする。$\mathrm{a} \in \mathrm{A},\ \mathrm{s} \in \mathrm{S}$, s と同型の元 t に対し、$\mathrm{a(s/t)} \in \mathrm{A}$ を S に関する a の階数について帰納的に定義する。

まず rank a=0 のとき、

$$\mathrm{a(s/t)} = \begin{cases} \mathrm{t} & (\mathrm{a} = \mathrm{s}\ \text{のとき}) \\ \mathrm{a} & (\mathrm{a} \neq \mathrm{s}\ \text{のとき}) \end{cases}$$

と定義する。

次に、$\mathrm{rank\ a} \geq 1$ のときは $\mathrm{a} = \alpha_\lambda(\mathrm{a_1}, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})$ と表せて、$\mathrm{rank\ a_i} < \mathrm{rank\ a}\ (\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n}_\lambda)$. よって

$$\mathrm{a(s/t)} = \begin{cases} \alpha_\lambda(\mathrm{a_1(s/t)}, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda}\mathrm{(s/t)}) & (\mathrm{s} \notin \mathrm{S}^\lambda\ \text{のとき}) \\ \mathrm{a} & (\mathrm{s} \in \mathrm{S}^\lambda\ \text{のとき}) \end{cases}$$

と定義する。

定理 7 (代入と自由)
$a \in A,\ s,t \in S$, s と t は同型で、$b = a(s/t)$ とすると、

$$S^{b}_{free} \subseteq \{t\} \cup (S^{a}_{free} - \{s\})$$

定義 14 (相似)
(A,T,σ,S) を普遍型付代数系とする。A の元 a,b と A の相異なる素元 s,t が次の四条件を満たすとする。
0. s と t は同型である。
1. b=a(s/t)
2. t は a に自由に現れない
3. a において s は t から自由である。
このとき、a **は** s,t **に関して** b **に相似である**と言い、a(s)(t)b で表す。

定理 8 上の条件下で、a(s)(t)b なら b(t)(s)a が成り立つ。

定理 9 (代入による階数不変性)
(A,T,σ,S) を普遍型付代数系とする。
$a \in A,\ s \in S$, s と同型の元 $t \in S$ に対して $\mathrm{rank}\ a = \mathrm{rank}\ a(s/t)$ が成り立つ。

定理 10
s,t,u を相異なる同型の素元、$a, b \in A$ とする。
a において s が b から自由であるとするとき、a(t/u) において s は b から自由。

[証明]
a において s が b から自由であるとする。
rank a に関する帰納法で示す。
(1)rank a=0 のとき、$a \in S$.
代入の定義より a(t/u)=u (a=t のとき), a ($a \neq t$ のとき).
a=t とすると、$a(t/u) = u$.
$s, u \in S$ より u は s に自由に現れない。
よって、a(t/u) において s は b から自由。
$a \neq t$ とすると、a(t/u)=a.
よって、仮定より a(t/u) において s は b から自由。

(2)rank $a \geq 1$ のとき、$a = \alpha_\lambda(a_1, \cdots, a_{n_\lambda})$ と書ける。
代入の定義より $a(t/u) = \alpha_\lambda(a_1(t/u), \cdots, a_{n_\lambda}(t/u))$ ($t \notin S^\lambda$ のとき), a ($t \in S^\lambda$ のとき).
$t \in S^\lambda$ のとき、仮定より a(t/u) において s は b から自由。
$t \notin S^\lambda$ のとき、仮定より a において s は b から自由だから、定理 6 より s は a に自由に現れないか、
各 a_k において s は b から自由かつ $S^{b}_{free} \cap S^\lambda = \emptyset$.

s が a に自由に現れないとする。
定理 7 より $S^{a(t/u)}_{free} \subseteq \{u\} \cup (S^{a}_{free} - \{t\})$.

$\mathrm{s} \neq \mathrm{u},\ \mathrm{a} \notin \mathrm{S}^{\mathrm{a}}_{\mathrm{free}}$ より $\mathrm{s} \notin \mathrm{S}^{\mathrm{a(t/u)}}_{\mathrm{free}}$.
よって、s は a(t/u) に自由に現れない。
従って、a(t/u) において s は b から自由。

各 $\mathrm{a_k}$ において s は b から自由かつ $\mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{S}^{\lambda} = \emptyset$ であるとする。
帰納法の仮定より、各 $\mathrm{a_k(t/u)}$ において s は b から自由。
$\mathrm{S}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{S}^{\lambda} = \emptyset$ だから、定理 6 より a(t/u) において s は b から自由。
よって、いずれの場合も a(t/u) において s は b から自由。

■

1.2 関係についての諸性質

この節では断りのない限り、A を集合とし、$\mathrm{A}^* = \bigcup_{\mathrm{n} \geq 0} \mathrm{A}^{\mathrm{n}}$, $\preceq$ を A^* 上の関係とする。

定義 15 (偏束律)
A を集合、$\models$ を A^*, A 間の関係とする。
A^*, A 間の関係についての次の五法則を**偏束律**と呼ぶ。ただし、$\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathrm{A},\ \alpha, \beta \in \mathrm{A}^*$ とする。

1. (**反復律**)
$$\mathrm{x} \models \mathrm{x}$$

2. (**偏付加律**)
$$\alpha \models \mathrm{y} \Longrightarrow \mathrm{x}\alpha \models \mathrm{y}$$

3. (**偏巾等律**)
$$\mathrm{xx}\alpha \models \mathrm{y} \Longrightarrow \mathrm{x}\alpha \models \mathrm{y}$$

4. (**偏置換律**)
$$\alpha\mathrm{xy}\beta \models \mathrm{z} \Longrightarrow \alpha\mathrm{yx}\beta \models \mathrm{z}$$

5. (**偏消去律**)
$$\alpha \models \mathrm{x},\ \mathrm{x}\beta \models \mathrm{y} \Longrightarrow \alpha\beta \models \mathrm{y}$$

定義 16 (束律)
$\preceq$ についての次の 1 から 5 の五法則を**束律**と呼ぶ。また、5 の代わりに 6 を加えた五法則を**強束律**と呼ぶ。ただし、$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{A}^*$ とする。

1. (**反復律**)
$$\mathrm{x} \preceq \mathrm{x}$$

2. (**付加律**)
$$\begin{cases} \alpha \preceq \beta \Longrightarrow \mathrm{x}\alpha \preceq \beta \\ \alpha \succeq \beta \Longrightarrow \mathrm{x}\alpha \succeq \beta \end{cases}$$

3. (**巾等律**)

$$\begin{cases} \mathrm{xx}\alpha \preceq \beta \Longrightarrow \mathrm{x}\alpha \preceq \beta \\ \mathrm{xx}\alpha \succeq \beta \Longrightarrow \mathrm{x}\alpha \succeq \beta \end{cases}$$

4. (**置換律**)

$$\begin{cases} \alpha\mathrm{xy}\beta \preceq \gamma \Longrightarrow \alpha\mathrm{yx}\beta \preceq \gamma \\ \alpha\mathrm{xy}\beta \succeq \gamma \Longrightarrow \alpha\mathrm{yx}\beta \succeq \gamma \end{cases}$$

5. (**消去律**)

$$\begin{cases} \alpha \preceq \mathrm{x},\ \mathrm{x}\beta \preceq \delta \Longrightarrow \alpha\beta \preceq \delta \\ \alpha \succeq \mathrm{x},\ \mathrm{x}\beta \succeq \delta \Longrightarrow \alpha\beta \succeq \delta \end{cases}$$

6. (**強消去律**)

$$\alpha \preceq \mathrm{x}\gamma,\ \mathrm{x}\beta \preceq \delta \Longrightarrow \alpha\beta \preceq \gamma\delta$$

定義 17 (ブール律)

A を代数系、$\wedge, \vee, \Rightarrow$ を A 上の二項汎算法、$\diamondsuit$ を A 上の単項汎算法とする。強束律と A^* 上の関係 $\preceq$ についての次の七法則を合わせて**ブール律**と言う。ただし、$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A}$, ε は空列を表す。

1. (**下限律**)

$$\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} \preceq \mathrm{x} \qquad \mathrm{x} \wedge \mathrm{y} \preceq \mathrm{y} \qquad \mathrm{xy} \preceq \mathrm{x} \wedge \mathrm{y}$$

2. (**上限律**)

$$\mathrm{x} \vee \mathrm{y} \succeq \mathrm{x} \qquad \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \succeq \mathrm{y} \qquad \mathrm{xy} \succeq \mathrm{x} \vee \mathrm{y}$$

3. (**下補律**)

$$\mathrm{xx}^{\diamondsuit} \preceq \varepsilon$$

4. (**上補律**)

$$\mathrm{xx}^{\diamondsuit} \succeq \varepsilon$$

5. (**下補導律**)

$$\mathrm{x}^{\diamondsuit} \preceq \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{y}$$

6. (**反復導律**)

$$\mathrm{y} \preceq \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{y}$$

7. (**消去導律**)

$$\mathrm{x}, \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{y} \preceq \mathrm{y}$$

定理 11

$\preceq$ を A^* 上のブール関係とし、$\preceq$ の $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ への制限の対称核を $\asymp$ とする ($\mathrm{x} \asymp \mathrm{y} \Longleftrightarrow \mathrm{x} \preceq \mathrm{y}$ かつ $\mathrm{x} \succeq \mathrm{y}$). このとき以下のことが成り立つ。ただし $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in \mathrm{A}$ とする。

1. $\mathrm{x}_1 \asymp \mathrm{y}_1,\ \mathrm{x}_2 \asymp \mathrm{y}_2 \Longrightarrow \mathrm{x}_1 \wedge \mathrm{x}_2 \asymp \mathrm{y}_1 \wedge \mathrm{y}_2$
2. $\mathrm{x}_1 \asymp \mathrm{y}_1,\ \mathrm{x}_2 \asymp \mathrm{y}_2 \Longrightarrow \mathrm{x}_1 \vee \mathrm{x}_2 \asymp \mathrm{y}_1 \vee \mathrm{y}_2$
3. $\mathrm{x}_1 \asymp \mathrm{y}_1,\ \mathrm{x}_2 \asymp \mathrm{y}_2 \Longrightarrow \mathrm{x}_1 \Rightarrow \mathrm{x}_2 \asymp \mathrm{y}_1 \Rightarrow \mathrm{y}_2$
4. $\mathrm{x}_1 \asymp \mathrm{y}_1 \Longrightarrow \mathrm{x}_1^{\diamondsuit} \asymp \mathrm{y}_1^{\diamondsuit}$

定義 18 (フレーゲ律)

(A,S) を普遍型付代数系、V を S の部分集合、$\forall x,\ \exists x (x \in V)$ を A 上の単項汎算法とする。束律と A^* 上の関係 $\preceq$ についての次の七法則を合わせて**フレーゲ律**と言う。

1. (**全称律**)

$$\alpha \preceq a\beta \Longrightarrow \alpha \preceq \forall xa, \beta$$

2. (**存称律**)

$$\alpha \succeq a\beta \Longrightarrow \alpha \succeq \exists xa, \beta$$

ただし、1,2 において $a \in A$ は任意であるが、$x \in V$ は $\alpha, \beta \in A^*$ に現れる A の各元に自由に現れないとする。

3. (**全称代入律**)

$$\forall xa \preceq a(x/b)$$

4. (**存称代入律**)

$$\exists xa \succeq a(x/b)$$

ただし、3,4 において $x \in V$ は $a \in A$ において $b \in A_{\sigma x}$ から自由であるとする。

定理 12

$\preceq$ を A^* 上のフレーゲ関係とし、$\preceq$ の $A \times A$ への制限の対称核を $\asymp$ とする。このとき、任意の $x \in \mathrm{Var}$ と $a, b \in A$ について $a \asymp b \Longrightarrow \forall xa \asymp \forall xb,\ \exists xa \asymp \exists xb$ が成り立つ。

定理 13

$\preceq$ を A^* 上のフレーゲ関係とし、$\preceq$ の $A \times A$ への制限の対称核を $\asymp$ とする。$a \in A$ が $x, y \in V$ に関して $b \in A$ に相似であるとき、以下のことが成り立つ。

1. $\forall xa \asymp \forall yb$　　2. $\exists xa \asymp \exists yb$

定義 19 (切断)

$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ の元 (P,Q) が A **の $\preceq$ による切断**であるとは、任意の $\alpha, \beta \in A^*$ に対して次の条件を満たすことを言う。

$$\alpha \subseteq P,\ \beta \subseteq Q \Longrightarrow \alpha \npreceq \beta$$

A の $\preceq$ による切断の全体を $\mathcal{C}$ で表し、$\mathcal{P}A \times \mathcal{P}A$ 上の直積順序関係の $\mathcal{C}$ への制限を $\leq$ で表す。

定理 14

$\preceq$ が反復律に従い、(P,Q) が $\preceq$ による切断であれば $P \cap Q = \emptyset$ が成り立つ。

定理 15

$(X, Y) \in \mathcal{C}$ に対して、$\leq$ に関する極大な切断 (P,Q) で $X \subseteq P,\ Y \subseteq Q$ を満たすものが存在する。

1.3 論理代数学

定義 20 (形式言語)

次の四条件を満たす普遍型付代数系 (A,T,σ,Prm) を**形式言語**と呼ぶ。

1. 素元系 Prm は二つの部分集合 Con と $\mathrm{Var}(\neq \emptyset)$ によって直和分割されている。

2. T の算法記号系 Λ は、ある集合 Γ と Prm の直和 $\Gamma \amalg \mathrm{Prm}$ 上の普遍半群 $(\Gamma \amalg \mathrm{Prm})^+$ の部分集合 $\Gamma \amalg \Gamma\mathrm{Var}$ に含まれる。ただし、$\Gamma\mathrm{Var} = \{\gamma\mathrm{x} |\ \gamma \in \Gamma,\ \mathrm{x} \in \mathrm{Var}\}$ である。

3. 任意の $\lambda \in \Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ は単項算法記号である。

4. T に文型という名の特別な元 ϕ が定められている。

集合 Con,Var それぞれの元を**定数・変数**と呼び、A の ϕ 型の元を**文**と呼ぶ。また、Γ を**算法記号基**と呼び、$\Lambda' = \Lambda \cap \Gamma$ に属す算法記号を**不変子**と呼び、T の算部分系 T_Λ を T' で表す。他方、$\Lambda \cap \Gamma\mathrm{Var}$ に属す算法記号を**可変子**と呼ぶ。

注意

「文」という場合、閉論理式（現れる変数が全て自由でない）を指す場合があるが、
ここではそのような制限は設けない。

定義 21 (一階述語言語)　**一階述語言語** A を次のような形式言語と定義する。　まず、素元系 Prm は任意とする。　次に型代数系 T については、台は二点集合 $\{\epsilon, \phi\}$ であり、算法記号基 Λ は二項算法記号 $\wedge, \vee, \Rightarrow$ と単項算法記号 $\diamondsuit, \forall\mathrm{x}, \exists\mathrm{x}(\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$、そして n 変数**関数記号**・n 変数**述語記号**という名の二種の n 項算法記号いくつかから成るものとする。ただし、述語記号は少なくとも一つあるとする。そして、その代数構造は以下のように定義する。ただし、$\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$, f,p はそれぞれ n 項関数記号、n 項述語記号とする。

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\wedge = \mathrm{Dom}\vee = \mathrm{Dom} \Rightarrow &= \{\phi\}^2 & \phi \wedge \phi = \phi \vee \phi = \phi \Rightarrow \phi &= \phi \\ \mathrm{Dom}\diamondsuit = \mathrm{Dom}\forall\mathrm{x} = \mathrm{Dom}\exists\mathrm{x} &= \{\phi\} & \phi^{\diamondsuit} = \forall x\phi = \exists\mathrm{x}\phi &= \phi \\ \mathrm{Dom\ f} &= \{\epsilon\}^{\mathrm{n}} & \mathrm{f}(\epsilon, \cdots, \epsilon) &= \epsilon \\ \mathrm{Dom\ p} &= \{\epsilon\}^{\mathrm{n}} & \mathrm{p}(\epsilon, \cdots, \epsilon) &= \phi \end{aligned}$$

算法記号基 Λ は $\wedge, \vee, \Rightarrow, \diamondsuit$ と関数記号・述語記号および記号 $\forall, \exists$ から成るものとする。

型分割写像 $\tau \in \mathrm{Prm} \to \mathrm{T}$ は、各 $\mathrm{x} \in \mathrm{Prm}$ に対して $\tau\mathrm{x} = \epsilon$ と定める。

定理 16

台 A に関数記号だけを算法として与えて出来る算部分系における Prm の算包を B, A に述語記号だけを算法として与えて出来る算部分系における B の算包を C とし、その一圏を C_1 とする。また、Λ の部分集合 M を $\mathrm{M} = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \diamondsuit, \forall\mathrm{x}, \exists\mathrm{x} |\ \mathrm{x} \in \mathrm{Var}\}$ と定める。このとき、$(\mathrm{A}_\phi, \mathrm{T}_\phi, \sigma|_{\mathrm{A}_\phi}, \mathrm{C}_1)$ は M 普遍汎代数系である。

定義 22 (認識対象世界)

形式言語 (A,T,σ,Prm) にとっての**認識可能世界**とは、T' 型代数系 W であって任意の $\mathrm{t} \in \sigma\mathrm{Prm}$ に対して $\mathrm{W_t} \neq \emptyset$ かつ文型 ϕ について $\mathrm{W}_\phi = \mathbb{T}(= \{0, 1\})$ を満たすもののことを言う。認識可能世界の範囲を適当に限定したものを**認識対象世界**と言う。

定義 23 (一階述語言語にとっての認識対象世界)

$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ を一階述語言語とする。一階述語言語 A にとっての認識可能世界 W は、集合としてはある集合 E と $\mathbb{T}$ の直和であり、算法記号系は $\wedge, \vee, \Rightarrow, \diamondsuit$ と関数記号・述語記号から成り、すべての算法は汎算法である。認識可能世界の定義によればその算法は任意で良いが、算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow, \diamondsuit$ が次のような条件を満たす認識可能世界だけを認識対象世界とする。

$$\mathrm{u} \wedge \mathrm{v} = \inf\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}, \qquad \mathrm{u} \vee \mathrm{v} = \sup\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\}, \qquad \mathrm{u}^{\diamondsuit} = 1 - \mathrm{u}, \qquad \mathrm{u} \Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{u}^{\diamondsuit} \vee \mathrm{v} \quad (\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{T})$$

定義 24 (付値)

$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ を形式言語、W をそれにとっての認識対象世界とする。

Con から W への保型写像を A から W への**定付値**と呼ぶ。

同様に、Var から W への保型写像を A から W への**変付値**と呼ぶ。そして、変付値の全体を Val で表す。

定義 25 (値換)

任意の $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$ と $\mathrm{w} \in \mathrm{W}_{\sigma \mathrm{x}}$ に対して、Val の変換 (x/w) を次のように定義する。すなわち、任意の $\mathrm{v} \in \mathrm{Val}$ に対して $(\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v} \in \mathrm{Val}$ を

$$((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v})\mathrm{y} = \begin{cases} \mathrm{w} & (\mathrm{y} = \mathrm{x} \text{ のとき}) \\ \mathrm{vy} & (\mathrm{Var} \ni \mathrm{y} \neq \mathrm{x} \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると、確かに $(\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v} \in \mathrm{Val}$ を満たす。この変換を**値換**と呼ぶ。

以下、$(\mathrm{A}, \mathrm{T}, \sigma, \mathrm{Prm})$ を一階述語言語、W を A にとっての認識対象世界とする。

巾代数系 $\mathrm{W}^{\mathrm{Val}} = (\mathrm{Val} \to \mathrm{W}_{\epsilon}) \amalg (\mathrm{Val} \to \mathrm{W}_{\phi})$ に算法 $\forall \mathrm{x}, \exists \mathrm{x} (\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} &\mathrm{Dom}\forall \mathrm{x} \in \mathrm{Val} \to \mathrm{W}_{\phi} && (\forall \mathrm{x} \varphi)\mathrm{v} = \inf\{\varphi((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}) |\ \mathrm{w} \in \mathrm{W}_{\epsilon}\} \\ &\mathrm{Dom}\exists \mathrm{x} \in \mathrm{Val} \to \mathrm{W}_{\phi} && (\exists \mathrm{x} \varphi)\mathrm{v} = \sup\{\varphi((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}) |\ \mathrm{w} \in \mathrm{W}_{\epsilon}\} \end{aligned}$$

ただし、$\varphi \in \mathrm{Val} \to \mathrm{W}_{\phi},\ \mathrm{v} \in \mathrm{Val}$ とする。W はすでに不変子を算法としてもつので、これにより $\mathrm{W}^{\mathrm{Val}}$ は T 代数系となった。

定義 26 (意味写像)

Φ を A から W への定付値とする。このとき、Φ^* なる A から $\mathrm{W}^{\mathrm{Val}}$ への保型準写が存在し、$\mathrm{a} \in \mathrm{Prm},\ \mathrm{v} \in \mathrm{Val}$ に対して

$$(\Phi^* \mathrm{a})\mathrm{v} = \begin{cases} \Phi \mathrm{a} & (\mathrm{a} \in \mathrm{Con} \text{ のとき}) \\ \mathrm{va} & (\mathrm{a} \in \mathrm{Var} \text{ のとき}) \end{cases}$$

定理 17 (代入値換定理)

$\mathrm{x} \in \mathrm{Var},\ \mathrm{s} \in \mathrm{A}$, x と s は同型で、$\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ において x は s から自由であるとする。このとき、任意の $\mathrm{v} \in \mathrm{Val}$ について次の式が成り立つ。

$$(\Phi^*(\mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{s})))\mathrm{v} = (\Phi^* \mathrm{a})((\mathrm{x}/(\Phi^* \mathrm{s})\mathrm{v})\mathrm{v})$$

1.4 論対

定義 27 (論対)

集合 A と $\mathcal{P}$A の部分集合 $\mathcal{B}$ の組 $(\mathrm{A},\mathcal{B})$ を**論対**と呼ぶ。

$\mathrm{C}=\bigcap_{\mathrm{B}\in\mathcal{B}}\mathrm{B}$ を $(\mathrm{A},\mathcal{B})$ の**核**と呼び、核の元を $(\mathrm{A},\mathcal{B})$ の**恒真元**と呼ぶ。

定義 28 (一階述語言語の文論対)

A を一階述語言語とする。A にとっての認識対象世界の一つを W,W への定付値を Φ, 変付値を v とすると、A_ϕ から $\mathbb{T}$ への写像 $\mathrm{a}\mapsto(\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v}$ が出来る。それを Φ^v で表し、W,Φ,v を任意に動かして得られる Φ^v 全体を $\mathcal{F}$ で表す。Φ^v と $(\Phi^\mathrm{v})^{-1}1$ を同一視することにより、$(\mathrm{A}_\phi,\mathcal{F})$ を論対とみなすことが出来る。そうみなしたものを A の**文論対**と呼ぶ。

定義 29 (モデル)

$(\mathrm{A},\mathcal{B})$ を論対とする。A の部分集合 X に対して $\mathrm{X}\subseteq\mathrm{B}$ なる $\mathrm{B}\in\mathcal{B}-\{\mathrm{A}\}$ を **X の $\mathcal{B}$ モデル**と呼ぶ。

また、$\mathcal{P}\mathrm{A}\times\mathcal{P}\mathrm{A}$ の元 (P,Q) に対して $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{B}\subseteq\mathrm{Q}^\circ$ を満たす $\mathrm{B}\in\mathcal{B}-\{\mathrm{A}\}$ を **(P,Q) の $\mathcal{B}$ モデル**と呼ぶ。

ただし、Q° は A における Q の補集合を表す。

論対が文論対の場合は、(P,Q) のモデルとは

$$\mathrm{P}\subseteq(\Phi^\mathrm{v})^{-1}1\neq\mathrm{A},\ \mathrm{Q}\subseteq(\Phi^\mathrm{v})^{-1}0$$

を満たすような認識対象世界 W と、W への定付値 Φ, W への変付値 v の組みのことを言う。

2 切断のモデルの存在定理

この章では本論文の主定理である「切断のモデルの存在定理」を証明する。定理は以下のものである。

定理 18 (切断のモデルの存在定理)

A を変数を可算個もち、関数記号と述語記号をそれぞれ高々可算個持つ一階述語言語とする。

$\preceq$ は A^*_ϕ 上のブール関係かつフレーゲ関係で、任意の認識対象世界と、定付値 Φ, 変付値 v について

$$a \preceq b \Longrightarrow (\Phi^* a)v \leq (\Phi^* b)v$$

を満たすとする。

さらに、(X,Y) を A_ϕ の $\preceq$ に関する切断で、以下の条件を満たすものとする。

$$X, Y \text{ に自由に現れない } Var_\epsilon \text{の元が可算個ある}$$

このとき、文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ において (X,Y) にモデルが存在する。

2.1 主定理証明のための補助定理

この節では主定理の証明に必要な命題を示す。そのために、次のことを仮定する。

すなわち、A を変数を可算個もち、関数記号と述語記号をそれぞれ高々可算個持つ一階述語言語とし、その関数記号・述語記号を f_j, p_i $(j \in J, i \in I)$ で表す。$\preceq$ は A^*_ϕ 上のブール関係かつフレーゲ関係で、任意の認識対象世界と、定付値 Φ, 変付値 v について

$$a \preceq b \Longrightarrow (\Phi^* a)v \leq (\Phi^* b)v$$

を満たすとする。さらに、(X,Y) を A_ϕ の $\preceq$ に関する切断で、以下の条件を満たすものとする。

$$X, Y \text{ に自由に現れない } Var_\epsilon \text{の元が可算個ある}$$

定理 19

$(A_\phi, \mathcal{F})$ を一階述語言語の文論対とする。このとき、$A \notin \mathcal{F}$. すなわち $fA = \{1\}$ なる $\mathcal{F}$ の元 f は存在しない。

[証明] $f \in \mathcal{F}$, $fA = 1$ とする。

f は準写であるから、$a \in A_\phi$ に対して $f(a^\diamondsuit) = (fa)^\diamondsuit = 1 - fa$. よって、$fa = 0$ または $f(a^\diamondsuit) = 0$ となる。これは $fA = 1$ に矛盾。

■

定理 19 により $\mathcal{F} - \{A\} = \mathcal{F}$ が成り立つ。本来モデルの存在を論じるときに、$f \in \mathcal{F}$ が $f^{-1}1 \neq A$ かどうかを確認しなければいけないが、今の場合はその必要はないことが示された。

$D = \{d \in A_\phi |\ d = \forall xa$ または $d = \exists xa\}$

とすると、D は高々可算。

$D = \{d_1, d_2, \cdots\}$ とおく。

$h_n \in A_\phi$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を次のように帰納的に定める。

$d_1 = \lambda xa$ と書ける $(\lambda \in \{\forall,\ \exists\})$. 仮定より、$X \cup Y$ に自由に現れない Var_ϵ の元は可算個ある。その中で a に算法としても現れないものの一つで x でないものを y_1 とする。h_1 を次のように定める。

$$d_1 = \forall xa \text{ のとき、} h_1 = a(x/y_1) \Rightarrow \forall xa$$
$$d_1 = \exists xa \text{ のとき、} h_1 = \exists xa \Rightarrow a(x/y_1)$$

$h_1, \cdots, h_{n-1}$ が定まったとし、$d_n = \lambda xa$ とする $(\lambda \in \{\forall,\ \exists\})$. 仮定より、$X \cup Y, h_1, \cdots, h_{n-1}$ に自由に現れない Var_ϵ の元が可算個ある。その中で a に算法としても現れないものの一つで x でないものを y_n とする。h_n を次のように定める。

$$d_n = \forall xa \text{ のとき、} h_n = a(x/y_n) \Rightarrow \forall xa$$
$$d_n = \exists xa \text{ のとき、} h_n = \exists xa \Rightarrow a(x/y_n)$$

$Z = \{h_1, h_2, \cdots\}$ とする。

定理 20 $(X \cup Z, Y)$ は A_ϕ の $\preceq$ に関する切断である。

[証明] 背理法で示す。

$(X \cup Z, Y)$ が切断でないと仮定すると、$\exists \alpha \subseteq X,\ \beta \subseteq Y, h_j \in Z$ $(j = 1, \cdots, n)$ s.t. $\alpha, h_1, \cdots, h_n \preceq \beta \cdots (1)$.
$\alpha, h_1, \cdots, h_n \preceq \beta$ を満たす α, β, h_j の中で、n が最小となるものをとる。

$h_n = f_n \Rightarrow g_n$ とおける。

$\preceq$ はブール関係だから、反復導律より $g_n \preceq f_n \Rightarrow g_n \cdots (2)$.

(1)(2) と消去律より $\alpha, h_1, \cdots, h_{n-1}, g_n \preceq \beta \cdots (3)$

他方、下補導律より $f_n^\diamondsuit \preceq f_n \Rightarrow g_n \cdots (4)$. 上補律より $\preceq f_n f_n^\diamondsuit \cdots (5)$.

(4)(5) と消去律より $\preceq f_n, f_n \Rightarrow g_n \cdots (6)$.

(1)(6) と消去律より $\alpha, h_1, \cdots, h_{n-1} \preceq \beta, f_n \cdots (7)$.

$h_n = a(x/y_n) \Rightarrow \forall xa$ とする。

仮定より y_n は $X \cup Y, h_1, \cdots, h_{n-1}$ に自由に現れないから、

(7) と全称律より $\alpha, h_1, \cdots, h_{n-1} \preceq \beta, \forall y_n a(x/y_n) \cdots (8)$.

ここで、a が x,y_n に関して $a(x/y_n)$ と相似であることを示す。

仮定より y_n は a に現れないから、y_n は a に自由に現れない。

また、$\{s_0, \cdots, s_n\}$ を x の a への自由の現れであるとすると、

y_n は a に算法として現れないので $\{s_0, \cdots, s_n\} \cap \{Im\ \forall y_n \cup Im\ \exists y_n\} = \emptyset$.

よって、a において x は y_n から自由である。

従って、a は x,y_n に関して $a(x/y_n)$ と相似である。

よって、定理 13 より $\forall y_n a(x/y_n) \asymp \forall xa \cdots (9)$.
(3)(8)(9) と消去律より $\alpha, h_1, \cdots, h_{n-1} \preceq \beta$.
これは n の最小性に矛盾。

$h_n = \exists xa \Rightarrow a(x/y_n)$ とする。仮定より y_n は $X \cup Y, h_1, \cdots, h_{n-1}$ に自由に現れないから、
(3) と存称律より $\alpha, h_1, \cdots, h_{n-1} \preceq \beta, \exists y_n a(x/y_n) \cdots (10)$.
上と同様に、a は x,y_n に関して $a(x/y_n)$ と相似なので、定理 13 より $\exists xa \asymp \exists y_n a(x/y_n) \cdots (11)$.
(7)(10)(11) と消去律より $\alpha, h_1, \cdots, h_{n-1} \preceq \beta$.
これは n の最小性に矛盾。

■

定理 15 により $(X \cup Z, Y) \leq (P, Q)$ なる極大な切断 (P,Q) が存在する。

次の定理の証明のため、補題を用意する。
補題
$f \in A_\phi,\ t \in A_\epsilon,\ x \in Var_\epsilon \Longrightarrow\ \exists g \in A_\phi$ s.t. rank f = rank g, $f \asymp g$, x は g において t から自由。
ただし、$f \asymp g \Longleftrightarrow f \preceq g,\ f \succeq g$.
[証明] A_ϕ における f の階数に関する帰納法で示す。
(a) rank f=0 のとき、n_i 項述語記号 p_i を用いて $f = p_i(t_1, \cdots, t_{n_i}),\ t_j \in A_\epsilon$ と書ける。
よって、f に $\forall x, \exists x$ は現れない。従って、x は f において t から自由。
よって g=f とすればよい。

(b) rank f$\geq$ 1 とすると、$f = \alpha_\lambda(a_1, \cdots, a_{n_\lambda})$ とおける。

(1)$f = \forall xh'$ のとき
任意の f における x の現れは自由でない。よって、x は f において t から自由。
従って g=f とすればよい。

(2)$f = \exists xh'$ のとき
任意の f における x の現れは自由でない。よって、x は f において t から自由。
従って g=f とすればよい。

(3)$f = \forall yh',\ y \in Var^t,\ y \neq x$ のとき
帰納法の仮定により、$\exists$h s.t. rank h = rank h', $h' \asymp h$,x は h において t から自由。
t,h に算法としても現れない $z \in Var_\epsilon - \{x\}$ をとり、$g = \forall zh(y/z)$ とする。
$y \in Var^t$ より、y は t に現れるので、$y \neq z$.
定理 10 より、h(y/z) において x は t から自由。
z は t に現れないから、z は t に自由に現れない。
よって、$Var^t_{free} \cap Var^{\forall z} = Var^t_{free} \cap \{z\} = \emptyset$.
よって、定理 6 より、x は g において t から自由。

仮定より、z は h に現れないから、z は h に自由に現れない。
また、z は h に算法として現れないので任意の h への y の自由な現れ $\{s_0, \cdots, s_n\}$ に対して $\{s_0, \cdots, s_n\} \cap \{\mathrm{Im}\ \forall z \cup \mathrm{Im}\ \exists z\} = \emptyset$. よって、h において y は z から自由。
従って、h は y,z に関して h(y/z) と相似。よって、定理 13 より $\forall yh \asymp \forall zh(y/z)$.
また、定理 12 より $\asymp$ は $\forall y$ と両立するから $\forall yh' \asymp \forall yh$. よって $f \asymp g$.

rank h=rank h(y/z) が成り立つことを A_ϕ における h の階数に関する帰納法で示す。
rank h=0 のとき、h は述語記号 p_i を用いて $h = p_i(t_1, \cdots, t_{n_i})$ と書ける。
代入の定義より $h(y/z) = (p_i(t_1, \cdots, t_{n_i}))(y/z) = p_i(t_1(y/z), \cdots, t_{n_i}(y/z))$. よって、rank h(y/z)=0.
rank $h \geq 1$ のとき、h は $\lambda \in M$ を用いて $h = \lambda(a_1, \cdots, a_{n_\lambda})$ と書け、rank $h = \Sigma_{i=1}^{n_\lambda}\mathrm{rank}\ a_i + 1$.
$y \notin \mathrm{Var}^\lambda$ のとき、代入の定義より $h(y/z) = (\lambda(a_1, \cdots, a_{n_\lambda}))(y/z) = \lambda(a_1(y/z), \cdots, a_{n_\lambda}(y/z))$.
rank $a_i <$ rank h より、帰納法の仮定から rank a_i = rank $a_i(y/z)$ $(i = 1, \cdots, n_\lambda)$.
よって、rank $h(y/z) = \Sigma_{i=1}^{n_\lambda}\mathrm{rank}\ a_i(y/z) + 1 = \Sigma_{i=1}^{n_\lambda}\mathrm{rank}\ a_i + 1 = \mathrm{rank}\ h$.
$y \in \mathrm{Var}^\lambda$ のとき、代入の定義より $h(y/z) = h$. よって rank h(y/z)=rank h.
従って rank f=rank h+1=rank h(y/z)+1=rank g.
以下、階数についての等式の証明は同様なので省略する。

(4)$f = \forall yh', y \notin \mathrm{Var}^t$ $y \neq x$ のとき
帰納法の仮定により、$\exists h$ s.t. $h' \asymp h$,x は h において t から自由。
$g = \forall yh$ とする。
x は h において t から自由であり、$y \notin \mathrm{Var}^t$ より $\mathrm{Var}^t_{\mathrm{free}} \cap \{y\} = \emptyset$.
よって、定理 6 より x は g において t から自由。
定理 12 より $\asymp$ は $\forall y$ と両立するから $\forall yh' \asymp \forall yh$.
よって $f \asymp g$.

(5)$f = \exists yh'$, $y \in \mathrm{Var}^t$ $y \neq x$ のとき
帰納法の仮定により、$\exists h$ s.t. $h' \asymp h$,x は h において t から自由。
t,h に算法としても現れない $z \in \mathrm{Var}_\epsilon$ をとり、$g = \exists zh(y/z)$ とする。
$y \in \mathrm{Var}^t$ より、y は t に現れるので、$y \neq z$.
定理 10 より、h(y/z) において x は t から自由。
z は t に現れないから、z は t に自由に現れない。
z は t に現れないから、z は t に自由に現れない。
よって、$\mathrm{Var}^t_{\mathrm{free}} \cap \mathrm{Var}^{\exists z} = \mathrm{Var}^t_{\mathrm{free}} \cap \{z\} = \emptyset$.
よって、定理 6 より、x は g において t から自由。
仮定より、z は h に現れないから、z は h に自由に現れない。
また、z は h に算法として現れないので任意の h への y の自由な現れ $\{s_0, \cdots, s_n\}$ に対して $\{s_0, \cdots, s_n\} \cap \{\mathrm{Im}\ \forall z \cup \mathrm{Im}\ \exists z\} = \emptyset$. よって、h において y は z から自由。
従って、h は y,z に関して h(y/z) と相似。よって、定理 13 より $\exists yh \asymp \exists zh(y/z)$.
また、定理 12 より $\asymp$ は $\exists y$ と両立するから $\exists yh' \asymp \exists yh$. よって $f \asymp g$.

(6)$f=\exists yh', y\notin \mathrm{Var}^t$ $y\neq x$ のとき、

帰納法の仮定により、$\exists h$ s.t. $h'\asymp h$,x は h において t から自由。

$g=\exists yh$ とする。

x は h において t から自由であり、$y\notin \mathrm{Var}^t$ より $\mathrm{Var}^t_{\mathrm{free}}\cap\{y\}=\emptyset$.

よって、定理 6 より x は g において t から自由。

定理 12 より $\asymp$ は $\exists y$ と両立するから $\exists yh'\asymp\exists yh$. よって $f\asymp g$.

(7)$f=\alpha_\lambda(f_1,\cdots,f_{n_\lambda})$, α_λ は不変子のとき

帰納法の仮定により、$\exists g_i$ s.t. $f_i\asymp g_i$,x は g_i において t から自由 $(i=1,\cdots,n_\lambda)$.

$\preceq$ はブール関係なので、定理 11 より $\asymp$ は α_λ と両立する。よって、$g=\alpha_\lambda(g_1,\cdots,g_{n_\lambda})$ とすると $f\asymp g$.

また、α_λ は不変子なので、定理 6 より x は g において t から自由。

■

定理 21 $(X\cup Z,Y)\leq(P,Q)$ なる極大な切断 (P,Q) は次の条件を満たす。

1. $x\wedge y\in P\Longrightarrow x,y\in P$
2. $x\wedge y\in Q\Longrightarrow x\in Q$ または $y\in Q$
3. $x\vee y\in P\Longrightarrow x\in P$ または $y\in Q$
4. $x\vee y\in Q\Longrightarrow x,y\in Q$
5. $x\Rightarrow y\in P\Longrightarrow x\in Q$ または $y\in P$
6. $x\Rightarrow y\in Q\Longrightarrow x\in P, y\in Q$
7. $x^\diamondsuit\in P\Longrightarrow x\in Q$
8. $x^\diamondsuit\in Q\Longrightarrow x\in P$
9. $\forall xa\in P\Longrightarrow$ 任意の $t\in A_\epsilon$ に対してある $b\in A_\phi$ が存在して、
   $\mathrm{rank}\ a=\mathrm{rank}\ b,\ a\asymp b,\ b(x/t)\in P$, x は b において t から自由
10. $\forall xa\in Q\Longrightarrow$ ある $t\in A_\epsilon$ が存在して $a(x/t)\in Q$, x は a において t から自由
11. $\exists xa\in P\Longrightarrow$ ある $t\in A_\epsilon$ が存在して $a(x/t)\in P$, x は a において t から自由
12. $\exists xa\in Q\Longrightarrow$ 任意の $t\in A_\epsilon$ に対して、ある $b\in A_\phi$ が存在して、
    $\mathrm{rank}\ a=\mathrm{rank}\ b,\ a\asymp b,\ b(x/t)\in Q$, x は b において t から自由

[証明]

1. $x\wedge y\in P$ を仮定する。

$x\notin P$ とすると、(P,Q) の極大性より $(P\cup\{x\},Q)$ は切断でない。

よって、$\exists\alpha\subseteq P,\beta\subseteq Q$ s.t. $x,\alpha\preceq\beta\cdots(1)$.

$\preceq$ はブール関係だから、下限律より $x\wedge y\preceq x\cdots(2)$.

(1)(2) と強消去律より、$x\wedge y,\alpha\preceq\beta$.

$x\wedge y\in P$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $x\in P$.

$y\notin P$ としても同様に矛盾になるので、$y\in P$.

2. $x\wedge y\in Q$ を仮定する。

$x, y \notin Q$ とすると、(P,Q) の極大性より $(P, Q \cup \{x, y\})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P, \beta \subseteq Q$ s.t. $\alpha \preceq \beta, xy \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、下限律より $xy \preceq x \wedge y \cdots (2)$.
(1)(2) と強消去律より、$\alpha \preceq \beta, x \wedge y$.
$x \wedge y \in Q$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $x \in Q$ または $y \in Q$.

3. $x \vee y \in P$ を仮定する。
$x, y \notin P$ とすると、(P,Q) の極大性より $(P \cup \{x, y\}, Q)$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P, \beta \subseteq Q$ s.t. $xy, \alpha \preceq \beta \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、上限律より $x \vee y \preceq xy \cdots (2)$.
(1)(2) と強消去律より、$x \vee y, \alpha \preceq \beta$.
$x \vee y \in P$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $x \in P$. または $y \in P$.

4. $x \wedge y \in Q$ を仮定する。
$x \notin Q$ とすると、(P,Q) の極大性より $(P, Q \cup \{x\})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P, \beta \subseteq Q$ s.t. $\alpha \preceq \beta, x \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、下限律より $x \preceq x \vee y \cdots (2)$.
(1)(2) と強消去律より、$\alpha \preceq \beta, x \vee y$.
$x \vee y \in Q$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $x \in Q$.
$y \notin Q$ としても同様に矛盾になるので、$y \in Q$.

5. $x \Rightarrow y \in P$ を仮定する。
$x \notin Q,\ y \notin P$ とすると、(P,Q) の極大性より $(P \cup \{y\}, Q \cup \{x\})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P, \beta \subseteq Q$ s.t. $y, \alpha \preceq \beta, x \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、消去導律より $x, x \Rightarrow y \preceq y \cdots (2)$.
(1)(2) と強消去律より、$x \Rightarrow y, \alpha \preceq \beta$.
$x \Rightarrow y \in P$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $x \in Q,\ y \in P$.

6. $x \Rightarrow y \in Q$ を仮定する。
$x \notin P$ とすると、(P,Q) の極大性より $(P \cup \{x\}, Q)$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P, \beta \subseteq Q$ s.t. $x, \alpha \preceq \beta \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、下補導律より $x^{\diamondsuit} \preceq x \Rightarrow y \cdots (2)$.
上補律より $\preceq xx^{\diamondsuit} \cdots (3)$.
(1)(2)(3) と強消去律より、$\alpha \preceq \beta, x \Rightarrow y$.
$x \Rightarrow y \in Q$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $x \in P$.
$y \notin Q$ とすると、(P,Q) の極大性より、$(P, Q \cup \{y\})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P, \beta \subseteq Q$ s.t. $\alpha \preceq \beta, y \cdots (4)$.
$\preceq$ はブール関係だから、反復導律より $y \preceq x \Rightarrow y \cdots (5)$.
(4)(5) と強消去律より、$\alpha \preceq \beta, x \Rightarrow y$.
$x \Rightarrow y \in Q$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $y \in Q$.

7. $\mathrm{x}^{\diamondsuit} \in \mathrm{P}$ を仮定する。
$\mathrm{x} \notin \mathrm{Q}$ とすると、(P,Q) の極大性より $(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cup \{\mathrm{x}\})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq \mathrm{P}, \beta \subseteq \mathrm{Q}$ s.t. $\alpha \preceq \beta, \mathrm{x} \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、下補律より $\mathrm{xx}^{\diamondsuit} \preceq \cdots (2)$
(1)(2) と強消去律より、$\mathrm{x}^{\diamondsuit}, \alpha \preceq \beta$.
$\mathrm{x}^{\diamondsuit} \in \mathrm{P}$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $\mathrm{x} \in \mathrm{Q}$.

8. $\mathrm{x}^{\diamondsuit} \in \mathrm{Q}$ を仮定する。
$\mathrm{x} \notin \mathrm{P}$ とすると、(P,Q) の極大性より $(\mathrm{P} \cup \{\mathrm{x}\}, \mathrm{Q})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq \mathrm{P}, \beta \subseteq \mathrm{Q}$ s.t. $\mathrm{x}, \alpha \preceq \beta \cdots (1)$.
$\preceq$ はブール関係だから、上補律より $\preceq \mathrm{xx}^{\diamondsuit} \cdots (2)$
(1)(2) と強消去律より、$\alpha \preceq \beta, \mathrm{x}^{\diamondsuit}$.
$\mathrm{x}^{\diamondsuit} \in \mathrm{Q}$ であるから、これは (P,Q) が切断であることに矛盾。よって $\mathrm{x} \in \mathrm{P}$.

9. $\forall \mathrm{xa} \in \mathrm{P}$ を仮定する。
補題より、ある $\mathrm{b} \in \mathrm{A}_{\phi}$ が存在して rank a = rank b, $\mathrm{a} \asymp \mathrm{b}$, x は b において t から自由。
定理 12 より $\asymp$ は $\forall \mathrm{x}$ と両立するから $\forall \mathrm{xa} \asymp \forall \mathrm{xb}$.
x は b において t から自由だから、全称代入律より $\forall \mathrm{xb} \preceq \mathrm{b}(\mathrm{x}/\mathrm{t})$.
よって、強消去律より $\forall \mathrm{xa} \preceq \mathrm{b}(\mathrm{x}/\mathrm{t})$.
$\mathrm{b}(\mathrm{x}/\mathrm{t}) \notin \mathrm{P}$ とすると、$(\mathrm{P} \cup \{\mathrm{b}(\mathrm{x}/\mathrm{t})\}, \mathrm{Q})$ は切断ではないので $\exists \alpha \subseteq \mathrm{P},\ \beta \subseteq \mathrm{Q}$ s.t. $\alpha, \mathrm{b}(\mathrm{x}/\mathrm{t}) \preceq \beta$.
強消去律より $\alpha, \forall \mathrm{xa} \preceq \beta$.
これは $\forall \mathrm{xa} \in \mathrm{P}$ に矛盾。

10. $\forall \mathrm{xa} \in \mathrm{Q}$ を仮定する。
ある n が存在して $\mathrm{d_n} = \forall \mathrm{xa}$. $\mathrm{y_n}$ が条件を満たすことを示す。
$\mathrm{y_n}$ は a に算法としても現れないので、
任意の a への x の自由な現れ $\{\mathrm{s_0}, \cdots, \mathrm{s_n}\}$ に対して $\{\mathrm{s_0}, \cdots, \mathrm{s_n}\} \cap \{\mathrm{Im}\ \forall \mathrm{y_n} \cup \mathrm{Im}\ \exists\ \mathrm{y_n}\} = \emptyset$.
よって、x は a において $\mathrm{y_n}$ から自由。
$\mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n}) \notin \mathrm{Q}$ を仮定すると、$(\mathrm{P}, \mathrm{Q} \cup \{\mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n})\})$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq \mathrm{P},\ \beta \subseteq \mathrm{Q}$ s.t. $\alpha \preceq \beta, \mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n})$.
$\preceq$ はブール関係だから、消去導律より $\mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n}), \mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n}) \Rightarrow \forall \mathrm{xa} \preceq \forall \mathrm{xa}$.
よって、強消去律より $\mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n}) \Rightarrow \forall \mathrm{xa}, \alpha \preceq \beta, \forall \mathrm{xa}$.
$\mathrm{a}(\mathrm{x}/\mathrm{y_n}) \Rightarrow \forall \mathrm{xa} \in \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{P}$ より、これは (P.Q) が切断であることに矛盾。

11. $\exists \mathrm{xa} \in \mathrm{P}$ を仮定する。
ある n が存在して $\mathrm{d_n} = \exists \mathrm{xa}$. $\mathrm{y_n}$ が条件を満たすことを示す。
$\mathrm{y_n}$ は a に算法としても現れないので、
任意の a への x の自由な現れ $\{\mathrm{s_0}, \cdots, \mathrm{s_n}\}$ に対して $\{\mathrm{s_0}, \cdots, \mathrm{s_n}\} \cap \{\mathrm{Im}\ \forall \mathrm{y_n} \cup \mathrm{Im}\ \exists\ \mathrm{y_n}\} = \emptyset$.
よって、x は a において $\mathrm{y_n}$ から自由。

$a(x/y_n) \notin Q$ を仮定すると、$(P \cup \{a(x/y_n)\}, Q)$ は切断でない。
よって、$\exists \alpha \subseteq P,\ \beta \subseteq Q$ s.t. $a(x/y_n), \alpha \preceq \beta$.
$\preceq$ はブール関係だから、消去導律より $\exists xa, \exists xa \Rightarrow a(x/y_n) \preceq a(x/y_n)$.
よって、強消去律より $\exists xa, \exists xa \Rightarrow a(x/y_n)\alpha \preceq \beta$.
$\exists xa \Rightarrow a(x/y_n) \in Z \subseteq P$ よりこれは (P,Q) が切断であることに矛盾。

12.$\exists xa \in Q$ を仮定する。
補題より、ある $b \in A_\phi$ が存在して rank a = rank b, $a \asymp b$, x は b において t から自由。
定理 12 より $\asymp$ は $\exists x$ と両立するから $\exists xa \asymp \exists xb$.
x は b において t から自由だから、全称代入律より $b(x/t) \preceq \exists xb$.
よって、強消去律より $b(x/t) \preceq \exists xa$.
$b(x/t) \notin Q$ とすると、$(P, Q \cup \{b(x/t)\})$ は切断ではないので $\exists \alpha \subseteq P,\ \beta \subseteq Q$ s.t. $\alpha \preceq \beta, b(x/t)$.
強消去律より $\alpha \preceq \beta, \forall xa$.
これは $\forall xa \in Q$ に矛盾。

■

2.2 主定理の証明

この節では主定理の証明を示す。
定理 18 (切断のモデルの存在定理)
A を変数を可算個もち、関数記号と述語記号をそれぞれ高々可算個持つ一階述語言語とする。
$\preceq$ は A^*_ϕ 上のブール関係かつフレーゲ関係で、任意の認識対象世界と、定付値 Φ, 変付値 v について

$$a \preceq b \Longrightarrow (\Phi^* a)v \leq (\Phi^* b)v$$

を満たすとする。
さらに、(X,Y) を A_ϕ の $\preceq$ に関する切断で、以下の条件を満たすものとする。

$$X, Y \text{ に自由に現れない } \mathrm{Var}_\epsilon \text{の元が可算個ある}$$

このとき、文論対 $(A_\phi, \mathcal{F})$ において (X,Y) にモデルが存在する。

[証明]
A にとっての認識対象世界 W と、定付値 Φ、変付値 v が存在して、

$$h \in P \Rightarrow (\Phi^* h)v = 1$$
$$h \in Q \Rightarrow (\Phi^* h)v = 0$$

を満たすことを示せばよい。

まず、世界として

$$W = A_\epsilon \amalg \mathbb{T}$$

と定める。W 上の算法 $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \diamondsuit, \bar{p_i}, \bar{f_j} |\ i \in I,\ j \in J\}$ を次のように定める。

$$
\begin{array}{rcc}
\mathrm{Dom}\wedge = \mathbb{T}^2 & a \wedge b = \inf\{a, b\} & \\
\mathrm{Dom}\vee = \mathbb{T}^2 & a \vee b = \sup\{a, b\} & \\
\mathrm{Dom} \Rightarrow = \mathbb{T}^2 & a \Rightarrow b = \sup\{1 - a, b\} & \\
\mathrm{Dom}\diamondsuit = \mathbb{T} & a^{\diamondsuit} = 1 - a & \\
\mathrm{Dom}\ \bar{p_i} = W_\epsilon^{n_i} & \bar{p_i}(t_1, \cdots, t_{n_i}) = 1 \Longleftrightarrow p_i(t_1, \cdots, t_{n_i}) \in P & (n_i \text{は} p_i \text{の項数}, i \in I) \\
\mathrm{Dom}\ \bar{f_j} = W_\epsilon^{m_j} & \bar{f_j}(t_1, \cdots, t_{m_j}) = f_j(t_1, \cdots, t_{m_j}) & (m_j \text{は} f_j \text{の項数}, j \in J)
\end{array}
$$

また、定付値 Φ, 変付値 v を次のように定める。

$$\Phi x = x\ (x \in \mathrm{Con}) \qquad vx = x\ (x \in \mathrm{Var})$$

このとき、題意が示されることを A_ϕ における h の階数による帰納法で示す。

補題

任意の $t \in A_\epsilon$ に対して $(\Phi^* t)v = t$.

[証明] A_ϵ は Prm を素元系とし、関数記号のみを算法記号としてもつ普遍汎代数系をみなせる。
そこで、普遍汎代数系としての t の階数についての帰納法で示す。

rank t=0 のとき、$t \in \mathrm{Prm}$.
$t \in \mathrm{Con}$ のとき、$(\Phi^* t)v = \Phi t = t$. $t \in \mathrm{Var}$ のとき、$(\Phi^* t)v = vt = t$.
よって、$(\Phi^* t)v = t$ が成り立つ。
rank $t \geq 1$ のとき、t は関数記号 f_j を用いて $t = f_j(t_1, \cdots, t_{m_j})$ と書ける。
$(\Phi^* t)v = (\Phi^*(f_j(t_1, \cdots, t_{m_j})))v = \bar{f_j}((\Phi^* t_1)v, \cdots, (\Phi^* t_{m_j})v) = \bar{f_j}(t_1, \cdots, t_{m_j}) = f_j(t_1, \cdots, t_{m_j}) = t.$
ただし、三番目の等式は帰納法の仮定による。

■

(a) rank h=0 のとき、$\exists i \in I,\ t_j \in A_\epsilon (j = 1, \cdots, n_i)$ s.t. $h = p_i(t_1, \cdots, t_{n_i})$.
補題より、$(\Phi^* t_j)v = t_j\ (j = 1, \cdots, n_i)$.
よって、$(\Phi^* h)v = (\Phi^*(p_i(t_1, \cdots, t_{n_i})))v = \bar{p_i}((\Phi^* t_1)v, \cdots, (\Phi^* t_{n_i})v) = \bar{p_i}(t_1, \cdots, t_{n_i})$.
$\bar{p_i}$ の定義より、
$h \in P \Rightarrow (\Phi^* h)v = 1$.
$h \in Q \Rightarrow (\Phi^* h)v = 0$.

(b) rank h≥1 とする。
1. $h = a \wedge b$ のとき
$(\Phi^* h)v = (\Phi^*(a \wedge b))v = (\Phi^* a)v \wedge (\Phi^* b)v = \inf\{(\Phi^* a)v, (\Phi^* b)v\}$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{P}$ とする。
定理 21 より $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{P}$.
帰納法の仮定より、$(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = (\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v} = 1$.
よって、$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = 1$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{Q}$ とする。
定理 21 より $\mathrm{a} \in \mathrm{Q}$ または $\mathrm{b} \in \mathrm{Q}$.
帰納法の仮定より、$(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = 0$ または $(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = 0$.
よって、$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = 0$.

2. $\mathrm{h} = \mathrm{a} \vee \mathrm{b}$ のとき
$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = (\Phi^{*}(\mathrm{a} \vee \mathrm{b}))\mathrm{v} = (\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} \vee (\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v} = \sup\{(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v}, (\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v}\}$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{P}$ とする。
定理 21 より $\mathrm{a} \in \mathrm{P}$ または $\mathrm{b} \in \mathrm{P}$.
帰納法の仮定より、$(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = 1$ または $(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = 1$.
よって、$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = 1$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{Q}$ とする。
定理 21 より $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{Q}$.
帰納法の仮定より、$(\Phi^{*}a)v = (\Phi^{*}b)v = 0$.
よって、$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = 0$.

3. $\mathrm{h} = \mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{b}$ のとき
$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = (\Phi^{*}(\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{b}))\mathrm{v} = (\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} \Rightarrow (\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v} = \sup\{1 - (\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v}, (\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v}\}$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{P}$ とする。
定理 21 より $\mathrm{a} \in \mathrm{Q}$ または $\mathrm{b} \in \mathrm{P}$.
帰納法の仮定より、$(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = 0$ または $(\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v} = 1$.
よって、$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = 1$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{Q}$ とする。
定理 21 より $\mathrm{a} \in \mathrm{P}$. $\mathrm{b} \in \mathrm{Q}$.
帰納法の仮定より、$(\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v} = 1,\ (\Phi^{*}\mathrm{b})\mathrm{v} = 0$.
よって、$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = 0$.

4. $\mathrm{h} = \mathrm{a}^{\diamondsuit}$ のとき
$(\Phi^{*}\mathrm{h})\mathrm{v} = (\Phi^{*}(\mathrm{a}^{\diamondsuit}))\mathrm{v} = ((\Phi^{*}\mathrm{a})\mathrm{v})^{\diamondsuit}$.

・$\mathrm{h} \in \mathrm{P}$ とする。

定理 21 より $a \in Q$.
帰納法の仮定より $(\Phi^* a)v = 0$.
よって、$(\Phi^* h)v = 1$.

・$h \in Q$ のとき
定理 21 より、$a \in P$.
帰納法の仮定より $(\Phi^* a)v = 1$.
よって、$(\Phi^* h)v = 0$.

5. $h = \forall xa$ のとき
$(\Phi^* h)v = (\Phi^*(\forall xa))v = (\forall x(\Phi^* a))v = \inf\{(\Phi^* a)((x/w)v) | \ w \in W_\epsilon\}$

・$h \in P$ のとき
定理 21 より、任意の $t \in A_\epsilon$ について、ある $b \in A_\phi$ が存在して、
rank a=rank b, $a \asymp b$, x は b において t から自由, $b(x/t) \in P$.
$\preceq$ についての条件より $(\Phi^* a)((x/t)v) = (\Phi^* b)((x/t)v)$.
$t \in A_\epsilon$ より $(\Phi^* b)((x/t)v) = (\Phi^* b)((x/(\Phi^* t)v)v)$.
x は b において t から自由なので、代入値換定理より $(\Phi^* b)((x/(\Phi^* t)v)v) = (\Phi^* b(x/t))v$.
rank $\forall$xa>rank a= rank b= rank b(x/t) より、帰納法の仮定から $(\Phi^* b(x/t))v = 1$.
よって、$(\Phi^* a)((x/t)v) = 1$.
$t \in A_\epsilon$ は任意であったから、W の定義より
$(\Phi^* h)v = \inf\{(\Phi^* a)((x/w)v) | \ w \in W_\epsilon\} = \inf\{(\Phi^* a)((x/t)v) | \ t \in A_\epsilon\} = 1$.

・$h \in Q$ のとき
定理 21 よりある $t \in A_\epsilon$ が存在して $a(x/t) \in Q$, x は a において t から自由。
$t \in A_\epsilon$ より $(\Phi^* a)((x/t)v) = (\Phi^* a)((x/(\Phi^* t)v)v)$.
x は a において t から自由なので、代入値換定理より $(\Phi^* a)((x/(\Phi^* t)v)v) = (\Phi^* a(x/t))v$.
rank $\forall$xa>rank a=rank a(x/t) より、帰納法の仮定から $(\Phi^* a(x/t))v = 0$.
よって $(\Phi^* a)((x/t)v) = 0$.
従って $(\Phi^* h)v = \inf\{(\Phi^* a)((x/t)v) | \ t \in A_\epsilon\} = 0$.

6. $h = \exists xa$ のとき
$(\Phi^* h)v = (\Phi^*(\exists xa))v = (\exists x(\Phi^* a))v = \sup\{(\Phi^* a)((x/w)v) | \ w \in W_\epsilon\}$

・$h \in P$ のとき
定理 21 よりある $t \in A_\epsilon$ が存在して $a(x/t) \in P$, x は a において t から自由。
$t \in A_\epsilon$ より $(\Phi^* a)((x/t)v) = (\Phi^* a)((x/(\Phi^* t)v)v)$.
x は a において t から自由なので、代入値換定理より $(\Phi^* a)((x/(\Phi^* t)v)v) = (\Phi^* a(x/t))v$.
rank $\exists$xa>rank a=rank a(x/t) より、帰納法の仮定から $(\Phi^* a(x/t))v = 0$.
よって $(\Phi^* a)((x/t)v) = 0$.

従って $(\Phi^* h)v = \sup\{(\Phi^* a)((x/t)v) | \ t \in A_\epsilon\} = 1$.

・$h \in Q$ のとき
定理 21 より、任意の $t \in A_\epsilon$ について、ある $b \in A_\phi$ が存在して、
rank a=rank b, $a \asymp b$, x は b において t から自由, b(x/t)∈Q.
$\preceq$ についての条件より $(\Phi^* a)((x/t)v) = (\Phi^* b)((x/t)v)$.
$t \in A_\epsilon$ より $(\Phi^* b)((x/(\Phi^* t)v)v)$.
x は b において t から自由なので、代入値換定理より $(\Phi^* b)((x/(\Phi^* t)v)v) = (\Phi^* b(x/t))v$.
rank ∃xa>rank a= rank b= rank b(x/t) より、帰納法の仮定から $(\Phi^* b(x/t))v = 1$.
よって、$(\Phi^* a)((x/t)v) = 0$.
$t \in A_\epsilon$ は任意であったから、W の定義より
$(\Phi^* h)v = \sup\{(\Phi^* a)((x/t)v) | \ t \in A_\epsilon\} = 0$.

■

3 一階述語論理における完全性定理

この章では、前章で示した「一階述語論理における切断のモデルの存在定理」を用いて一階述語論理の矢式における弱完全性を証明する。

3.1 論理学の完全性

この節では必要な定義・定理を紹介する。内容はすべて参考文献 [1] に拠る。

定義 30 (論拠)
A^*, A 間の関係と A の部分集合の組を A 上の**論拠**と呼ぶ。

定義 31 (界包)
R,D を A 上の論拠とする。A の部分集合 $\mathrm{D_n}$ $(\mathrm{n} = 0, 1, \cdots)$ を次のように帰納的に定義する。
まず、$\mathrm{D_0} = \mathrm{D}$ とする。$n \geq 1$ に対して、$\mathrm{D_{n-1}}$ が定義されたとき

$$\mathrm{D_n} = \mathrm{D_{n-1}} \cup \{\mathrm{y} \in \mathrm{A} |\ \exists \alpha \subseteq \mathrm{D_{n-1}} \text{ s.t. } \alpha \mathrm{R} \mathrm{y}\}$$

$\mathrm{D_n}$ を A の n 包、$\bigcup_{\mathrm{n} \geq 0} \mathrm{D_n}$ を D **の** R **包**と呼び、D の R 包を $[\mathrm{D}]_\mathrm{R}$ で表す。

定理 22
R が偏束律に従うとき、$[\mathrm{D}]_\mathrm{R} = \{\mathrm{y} \in \mathrm{A} |\ \exists \alpha \in \mathcal{P}'\mathrm{D} \text{ s.t. } \alpha \mathrm{R} \mathrm{y}\}$. ただし、$\mathcal{P}'\mathrm{D}$ は D の有限部分集合全体を表す。

定義 32 (生成関係)
R,D を A 上の論拠とする。
1. A^*, A 間の関係 $\models_{\mathrm{R,D}}$ を次のように定義する。

$$\alpha \models_{\mathrm{R,D}} \mathrm{y} \Longleftrightarrow [\alpha \cup \mathrm{D}]_\mathrm{R} \ni \mathrm{y}$$

$\models_{\mathrm{R,D}}$ を R の D 包と呼ぶ。

2. A^* 上の関係 $\preccurlyeq_{\mathrm{R,D}}$ を次のように定義する。

$$\alpha \preccurlyeq_{\mathrm{R,D}} \beta \Longleftrightarrow [\alpha \cup \mathrm{D}]_\mathrm{R} \supseteq \bigcap_{\mathrm{y} \in \beta} [\{\mathrm{y}\} \cup \mathrm{D}]_\mathrm{R}$$

$\preccurlyeq_{\mathrm{R,D}}$ を R,D の生成関係と呼ぶ。

定義より、R,D の生成関係の $\mathrm{A}^* \times \mathrm{A}$ への制限は R の D 包に等しい。

以下、$(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ を論対とし、その核を C とする。

定義 33 (最大論理)
任意の $\mathcal{B}$ の元を閉じる A^*, A 間の関係を $(\mathrm{A}, \mathcal{B})$ の**論理**と呼ぶ。すなわち、

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B},\ \alpha \subseteq \mathrm{B},\ \mathrm{y} \in \mathrm{A},\ \alpha \mathrm{R} \mathrm{y} \Longrightarrow \mathrm{y} \in \mathrm{B}$$

を満たす R を論理と呼ぶ。$(\mathrm{A},\mathcal{B})$ の論理には最大なものが存在する。それを $(\mathrm{A},\mathcal{B})$ の**最大論理**と呼び、Q で表す。

最大論理は偏束律に従う。

定義 34 (完全性)

R,D を A 上の論拠とする。

1. A 上の論拠 R,D が ($\mathcal{B}$ について) **健全**であるとは、$\models_{\mathrm{R,D}} \subseteq \mathrm{Q}$ を満たすこと言う。
2. A 上の論拠 R,D が ($\mathcal{B}$ について) **充分**であるとは、$\models_{\mathrm{R,D}} \supseteq \mathrm{Q}$ を満たすことを言う。
3. A 上の論拠 R,D が ($\mathcal{B}$ について) **完全**であるとは、健全かつ充分であることを言う。
4. A 上の論拠 R,D が ($\mathcal{B}$ について) **弱完全**であるとは、$\mathrm{C} = [\mathrm{D}]_{\mathrm{R}}$ を満たすことを言う。

定理 23

A 上の論拠 R,D についての次の条件は同等である。

1. R,D は完全である。
2. A の任意の部分集合 X について、$[\mathrm{X} \cup \mathrm{D}]_{\mathrm{R}} = [\mathrm{X}]_{\mathrm{Q}}$ が成り立つ。
3. $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{Q},\ \mathrm{D} \subseteq \mathrm{C},\ \mathrm{Q} \subseteq \models_{\mathrm{R,D}}$ が成り立つ。

定義 35 ($\mathbb{T}$ 値論対)

A を集合、$\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq A \to \mathbb{T}$ とする。$\mathcal{B} = \{\mathrm{f}^{-1}1 |\ \mathrm{f} \in \mathcal{F}\}$ とすると、$(\mathrm{A},\mathcal{B})$ は論対となる。そうみなしたものを $\mathbb{T}$ **値論対**と呼び、$(\mathrm{A},\mathcal{F})$ で表す。1 章で定義した形式言語の文論対も $\mathbb{T}$ 値論対である。$\mathrm{f} \in \mathcal{F},\ \mathrm{x} \in \mathrm{A}$ について fx を、x **の** f **真理値**と呼ぶ。また、f 真理値が 1 である A の元を f **真元**と呼ぶ。

定義 36 (恒真関係)

1. A^*, A 間の関係 $\models$ を次のように定義する。

$$\alpha \models \mathrm{y} \Longleftrightarrow \text{任意の } \mathrm{f} \in \mathcal{F} \text{ に対して、} \inf \mathrm{f}\alpha \leq \mathrm{fy}$$

$\models$ を $(\mathrm{A},\mathcal{F})$ の**偏恒真関係**と呼ぶ。

定理 24

$(\mathrm{A},\mathcal{F})$ の偏恒真関係 $\models$ は、$(\mathrm{A},\mathcal{F})$ の最大論理に等しい。

定理 25

A 上の論拠 R,D が $\mathcal{F}$ に関して完全であるためには、$\alpha \models \mathrm{y} \Longleftrightarrow \alpha \models_{\mathrm{R,D}} \mathrm{y}$ を満たすことが必要十分

定義 37 (矢式)

$(\mathrm{A},\mathcal{F})$ を $\mathbb{T}$ 値論対とする。

$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^* \times \mathrm{A}^*$ と定めて、$\overrightarrow{\mathrm{A}}$ の元 (α,β) を $\alpha \to \beta$ で表して矢式あるいは式と呼ぶ。

定義 38 A^* 上の関係 $\preccurlyeq$ を次のように定義し、$(\mathrm{A},\mathcal{F})$ の**恒真関係**と呼ぶ。

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Longleftrightarrow \text{任意の } \mathrm{f} \in \mathcal{F} \text{ に対して、} \inf \mathrm{f}\alpha \leq \sup \mathrm{f}\beta$$

恒真関係を用いれば、切断のモデルの存在定理における条件 (2) は

$$\text{関係 } \preceq \text{ はブール律とフレーゲ律に従い、} \preceq \subseteq \preccurlyeq \text{ を満たす}$$

と言い換えることが出来る。

定理 26 恒真関係は束律に従う。

$\overrightarrow{\mathrm{C}} = \{\alpha \to \beta \in \overrightarrow{\mathrm{A}} |\ \alpha \preccurlyeq \beta\}$ で表し、$\overrightarrow{\mathrm{C}}$ の元を $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ の恒真式と呼ぶ。

$\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{\alpha \to \beta \in \overrightarrow{\mathrm{A}} |\ \forall \mathrm{f} \in \mathcal{F},\ \inf \mathrm{f}\alpha \leq \sup \mathrm{f}\beta\}$ と定め、論対 $(\overrightarrow{\mathrm{A}}, \overrightarrow{\mathcal{F}})$ を $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ に随伴する式論対と呼ぶ。そうすると、$\overrightarrow{\mathrm{C}}$ は論対 $(\overrightarrow{\mathrm{A}}, \overrightarrow{\mathcal{F}})$ の核に他ならない。

定理 27 (完全性の基本定理)

$(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ を $\mathbb{T}$ 値論対とする。

$\overrightarrow{\mathrm{A}}_{\mathrm{R,D}} = \{\alpha \to \beta \in \overrightarrow{\mathrm{A}} |\ \alpha \preccurlyeq_{\mathrm{R,D}} \beta\}$ と表す。

A 上の健全な論拠 R,D と $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ 上の論拠 $\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}$ が次の二条件を満たせば、R,D は完全である。

1. $\overrightarrow{\mathrm{C}} \subseteq [\overrightarrow{\mathrm{D}}]_{\overrightarrow{\mathrm{R}}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{D}} \subseteq \overrightarrow{\mathrm{A}}_{\mathrm{R,D}}$ で、$\overrightarrow{\mathrm{A}}_{\mathrm{R,D}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ で閉じている。

また、一階述語論理の文論対については、この二条件は $\overrightarrow{\mathrm{C}} = [\overrightarrow{\mathrm{D}}]_{\overrightarrow{\mathrm{R}}} = \overrightarrow{\mathrm{A}}_{\mathrm{R,D}}$ と同等である。

完全性の基本定理によれば、A 上の健全な論拠 R,D が完全であることを示すには、上の条件 1,2 を満たすような $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ 上の論拠 $\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}$ を見つければよいことが分かる。そして、それには $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ 上の論拠 $\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}$ の弱完全性を示すことが必要であることが分かる。

3.2 一階述語論理の矢式における弱完全性定理

A を変数を加算個をもち、関数記号・述語記号をそれぞれ高々加算個もつ一階述語言語とする。$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ を文論対とし、$(\overrightarrow{\mathrm{A}_\phi}, \overrightarrow{\mathcal{F}})$ をそれに随伴する式論対とする。

$(\overrightarrow{\mathrm{A}_\phi}, \overrightarrow{\mathcal{F}})$ 上の論拠 $\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}$ を、以下のように定義する。

まず、$\overrightarrow{\mathrm{D}} = \{\mathrm{x} \to \mathrm{x} |\ \mathrm{x} \in \mathrm{A}_\phi\}$ とする。

次に $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ としては、次の十種二十個の A^*, A 間の関係の和をとる。

$$\frac{\alpha \to \beta}{\mathrm{a}\alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow \beta}{\mathrm{a}\alpha \leftarrow \beta}$$

$$\frac{\mathrm{aa}\alpha \to \beta}{\mathrm{a}\alpha \to \beta} \qquad \frac{\mathrm{aa}\alpha \leftarrow \beta}{\mathrm{a}\alpha \leftarrow \beta}$$

$$\frac{\alpha\mathrm{ab}\beta \to \gamma}{\alpha\mathrm{ba}\beta \to \gamma} \qquad \frac{\alpha\mathrm{ab}\beta \leftarrow \gamma}{\alpha\mathrm{ba}\beta \leftarrow \gamma}$$

$$\frac{\alpha \to \mathrm{a} \quad \mathrm{a}\beta \to \delta}{\alpha\beta \to \delta} \qquad \frac{\alpha \leftarrow \mathrm{a} \quad \mathrm{a}\beta \leftarrow \delta}{\alpha\beta \leftarrow \delta}$$

$$\frac{\mathrm{ab}\alpha \to \beta}{\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to \mathrm{a}\beta \quad \alpha \to \mathrm{b}\beta}{\alpha \to \mathrm{a} \wedge \mathrm{b}, \beta}$$

$$\frac{\mathrm{a}\alpha \to \beta \quad \mathrm{b}\alpha \to \beta}{\mathrm{a} \vee \mathrm{b}, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to \mathrm{ab}\beta}{\alpha \to \mathrm{a} \vee \mathrm{b}, \beta}$$

$$\frac{\alpha \to \mathrm{a}\beta}{\mathrm{a}^\diamond\alpha \to \beta} \qquad \frac{\mathrm{a}\alpha \to \beta}{\alpha \to \mathrm{a}^\diamond\beta}$$

$$\frac{\alpha \to \mathrm{a}\beta \quad \mathrm{b}\alpha \to \beta}{\mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{b}, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\mathrm{a}\alpha \to \mathrm{b}\beta}{\alpha \to \mathrm{a} \Rightarrow \mathrm{b}, \beta}$$

$$\frac{\mathrm{a(x/t)}, \alpha \to \beta}{\forall \mathrm{xa}, \alpha \to \beta} \qquad \frac{\alpha \to \mathrm{a}\beta}{\alpha \to \forall \mathrm{xa}, \beta}$$

$$\frac{\alpha \to \mathrm{a}\beta}{\alpha \to \exists \mathrm{xa}, \beta} \qquad \frac{\mathrm{a(x/t)}, \alpha \to \beta}{\exists \mathrm{xa}, \alpha \to \beta}$$

ただし、九種目の左側と十種目の右側においては a において x は $\mathrm{t} \in \mathrm{A}_\epsilon$ から自由であり、九種目の右側と十種目の左側においては x は α, β に自由に現れないとする。

次の定理は参考文献 [1] による。

定理 28

論拠 $\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}$ は健全であり、$\preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}}$ はブール律とフレーゲ律に従う。また、式論対 $(\overrightarrow{\mathrm{A}_\phi}, \overrightarrow{\mathcal{F}})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ もブール律とフレーゲ律に従う。

定理 29

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Longrightarrow \alpha \preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}} \beta$$

[証明] 対偶を示すために、$\alpha \not\preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}} \beta$ とする。

このとき、(α, β) は $\preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}}$ に関する切断である。実際、$\exists \alpha' \subseteq \alpha, \beta' \subseteq \beta$ s.t. $\alpha' \preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}} \beta'$ とすると、α, β が有限列であることと $\preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}}$ が付加律に従うことから $\alpha \preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}} \beta$ が成り立つ。これは矛盾。

$\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}$ は健全であるから $\preccurlyeq_{\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\mathrm{D}}} \subseteq \preccurlyeq$.

α, β は有限列なので、これらに自由に現れる変数は有限個である。よって A についての仮定により、α, β に自由に現れない変数は加算個ある。

よって、切断のモデルの存在定理の仮定を満たすので、$\exists \mathrm{W}, \Phi, \mathrm{v}$ s.t. $\alpha \subseteq (\Phi^{\mathrm{v}})^{-1}1,\ \beta \subseteq (\Phi^{\mathrm{v}})^{-1}0.$

従って、$\inf\ \Phi^{\mathrm{v}}\alpha = 1,\ \sup\ \Phi^{\mathrm{v}}\beta = 0.$ よって、$\alpha \not\preccurlyeq \beta.$

■

4　一階述語論理におけるモデルの存在定理

この章では、一階述語論理におけるモデルの存在定理を示す。断りのない限り、この章を通して A を変数を可算個もち、関数記号・述語記号をそれぞれ高々可算個持つ一階述語言語、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ を文論対、Q をその最大論理とする。

4.1　モデルの存在

A を形式言語、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ を $\mathbb{T}$ 値論対とする。

A_ϕ の部分集合 X に対してある $\mathrm{f} \in \mathcal{F} - \{1_\mathrm{A}\}$ が存在して fX=$\{1\}$ が成り立つとき、X にはモデルが存在すると言い、この f を X のモデルと呼ぶ。

定理 19 によれば、A が一階述語言語で $(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ が文論対であるときは $\mathcal{F} - \{1_\mathrm{A}\} = \mathcal{F}$ が成り立つ。

4.2　一階述語論理における条件付きモデルの存在定理

A を変数を可算個もち、関数記号・述語記号を高々可算個もつ一階述語言語、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ を文論対とする。

まず、ある条件の下で一階述語論理の無矛盾な文の集合にモデルが存在することを示す。

補題

A_ϕ の部分集合 X が $[\mathrm{X}]_\mathrm{Q} \neq \mathrm{A}_\phi$ を満たすとする (このことを X は無矛盾であるという)。
このとき、$(\mathrm{X}, \emptyset)$ は $(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ の恒真関係 $\preccurlyeq$ に関する切断である。

[証明] $\exists \alpha \subseteq \mathrm{X},\ \alpha \preccurlyeq \varepsilon$ とする。ただし、ε は空列を表す。

$\preccurlyeq$ は束律に従うから、付加律より任意の $\mathrm{y} \in \mathrm{A}_\phi$ に対して $\alpha \preccurlyeq \mathrm{y}$. $\preccurlyeq|_{\mathrm{A}_\phi^* \times \mathrm{A}_\phi} = \mathrm{Q}$ より $\alpha \mathrm{Q} \mathrm{y}$. よって、任意の $\mathrm{y} \in \mathrm{A}_\phi$ に対して $\mathrm{y} \in [\alpha]_\mathrm{Q}$. 従って、$\mathrm{A}_\phi \subseteq [\alpha]_\mathrm{Q} \subseteq [\mathrm{X}]_\mathrm{Q}$. よって、$[\mathrm{X}]_\mathrm{Q} = \mathrm{A}_\phi$. これは仮定に矛盾する。

■

定理 30 (一階述語論理における条件付きモデルの存在定理)

A_ϕ の無矛盾な部分集合 X が以下の条件 $(*)$ を満たすとき、X にはモデルが存在する。

$(*)$　X に自由に現れない変数が可算個存在する

[証明] 補題より $(\mathrm{X}, \emptyset)$ は恒真関係 $\preccurlyeq$ に関する切断である。A と X についての仮定より、切断のモデルの存在定理の仮定が満たされるので $\exists \mathrm{f} \in \mathcal{F}$ s.t. $\mathrm{fX} = 1$. よって、この f が X のモデルである。

■

4.3　変数拡大とモデルの存在

この節以降では、前節の条件 $(*)$ のないモデルの存在定理を証明することを目標とする。この節では、まず、そのための準備を行う。

定義 39

A, A' を共通の算法記号系、定数系をもつ一階述語言語とし、それぞれの変数系を $\mathrm{Var}, \mathrm{Var}'$ とする。$\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Var}'$ を満たすとき、A' を A **の変数拡大**という。

定理 31

A, A' を一階述語言語、A' を A の変数拡大、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F}), (\mathrm{A}'_\phi, \mathcal{F}')$ を文論対とする。このとき、$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cap \mathrm{A}_\phi$.

[証明] W を A にとっての認識対象世界、Φ を A から W への定付値とする。A' は A の変数拡大だから、W は A' にとっての認識対象世界でもあり、Φ は A' から W の定付値でもある。

A から W への変付値全体を Val, A' から W への変付値を Val' とする。$\mathrm{Var} \subseteq \mathrm{Var}'$ より、$\mathrm{Val} = \{\mathrm{v}'|_{\mathrm{Var}} \mid \mathrm{v}' \in \mathrm{Val}'\}$. $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ とする。$\mathrm{v} \in \mathrm{Val}, \mathrm{v}' \in \mathrm{Val}',\ \mathrm{v}'|_{\mathrm{Var}} = \mathrm{v}$ のとき、$(\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v} = (\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v}'$ が成り立つことを a の A における階数に関する帰納法で示す。

(a)rank a=0 のとき、$\mathrm{a} \in \mathrm{Prm}$.

$\mathrm{a} \in \mathrm{Con}$ のとき、$(\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v} = \Phi\mathrm{a} = (\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v}'$.

$\mathrm{a} \in \mathrm{Var}$ のとき、$(\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v} = \mathrm{va} = \mathrm{v}'\mathrm{a} = (\Phi\mathrm{a})\mathrm{v}'$.

(b)rank $\mathrm{a} \geq 1$ のとき $\mathrm{a} = \lambda(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})$ と表せる。

(1)λ が不変子のとき

$(\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v} = (\Phi^*(\lambda(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})))\mathrm{v} = \lambda((\Phi^*\mathrm{a}_1)\mathrm{v}, \cdots, (\Phi^*\mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})\mathrm{v}) = \lambda((\Phi^*\mathrm{a}_1)\mathrm{v}', \cdots, (\Phi^*\mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})\mathrm{v}')$

$= (\Phi^*(\lambda(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}_\lambda})))\mathrm{v}' = (\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v}'$.

二つ目と四つ目の等号は、Φ と v,Φ と v' から定まる準写がそれぞれ不変子に関して準写であることから、三つ目の等号は帰納法の仮定から成り立つ。

(2)λ が可変子のとき

任意の $\mathrm{x} \in \mathrm{Var},\ \mathrm{w} \in \mathrm{W}_\epsilon$ に対して $(\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}'|_{\mathrm{Var}} = (\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}$ が成り立つ。実際、$\mathrm{y} \in \mathrm{Var}$ とすると、

$\mathrm{y} = \mathrm{x}$ のとき、$((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}')\mathrm{y} = \mathrm{w} = ((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v})\mathrm{y}$. $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$ のとき、$((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}')\mathrm{y} = \mathrm{v}'\mathrm{y} = \mathrm{vy} = ((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v})\mathrm{y}$.

$\lambda = \forall\mathrm{x}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$ とする。

$(\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v} = (\Phi(\forall\mathrm{x}\mathrm{a}_1))\mathrm{v} = \inf\ \{(\Phi^*\mathrm{a}_1)((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v})|\ \mathrm{w} \in \mathrm{W}_\epsilon\} = \inf\ \{(\Phi^*\mathrm{a}_1)((\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}')|\ \mathrm{w} \in \mathrm{W}_\epsilon\}$

$= (\Phi(\forall\mathrm{x}\mathrm{a}_1))\mathrm{v}' = (\Phi^*\mathrm{a})\mathrm{v}'$.

三つ目の等号は、$(\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}'|_{\mathrm{Var}} = (\mathrm{x}/\mathrm{w})\mathrm{v}$ と帰納法の仮定から成り立つ。

$\lambda = \exists\mathrm{x}\ (\mathrm{x} \in \mathrm{Var})$ のときは、上の等式の inf を sup に置き換えれば成り立つ。

よって、$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \cap \mathrm{A}_\phi$.

逆は、A' にとっての認識対象世界 W と W への定付値が、A にとっての認識対象世界、定付値でもあることから、上と同じ議論により成り立つ。

■

定理 32

A, A' を一階述語言語、A' を A の変数拡大、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F}), (\mathrm{A}'_\phi, \mathcal{F}')$ を文論対とする。$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathcal{P}\mathrm{A}_\phi \times \mathcal{P}\mathrm{A}_\phi$ に $\mathcal{F}'$ モデルが存在すれば、(X,Y) に $\mathcal{F}$ モデルが存在する。

[証明] 仮定より、ある $\mathrm{f}' \in \mathcal{F}'$ が存在して $\mathrm{f}'\mathrm{X} = 1$. 定理 31 より $\mathrm{f}'|_{\mathrm{A}_\phi} \in \mathcal{F}$.

$\mathrm{f} = \mathrm{f}'|_{\mathrm{A}_\phi}$ とすると、$\mathrm{X} \subseteq \mathrm{A}_\phi$ より $\mathrm{fX} = 1,\ \mathrm{f} \in \mathcal{F}$. よって、f が X の $\mathcal{F}$ モデルとなる。

■

定理 33

A, A' を一階述語言語、A' を A の変数拡大、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F}), (\mathrm{A}'_\phi, \mathcal{F}')$ を文論対とし、
$\preccurlyeq, \preccurlyeq'$ をそれぞれの恒真関係とする。このとき、$\preccurlyeq' |_{\mathrm{A}^*_\phi \times \mathrm{A}^*_\phi} \subseteq \preccurlyeq$.

[証明] $\alpha, \beta \subseteq \mathrm{A}_\phi$, $\alpha \preccurlyeq' \beta$ とすると恒真関係の定義より、任意の $\mathrm{f}' \in \mathcal{F}'$ に対して $\sup \mathrm{f}'\alpha \leq \inf \mathrm{f}'\beta$.
$\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ とする。定理 31 より $\exists \mathrm{f}'$ s.t. $\mathrm{f}'|_{\mathrm{A}_\phi} = \mathrm{f}$. よって、$\sup \mathrm{f}'\alpha \leq \inf \mathrm{f}'\beta$. $\alpha, \beta \subseteq \mathrm{A}_\phi$ より $\sup \mathrm{f}\alpha \leq \inf \mathrm{f}\beta$.
$\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ は任意であったから、$\alpha \preccurlyeq \beta$. よって、$\preccurlyeq'_{\mathrm{A}^*_\phi \times \mathrm{A}^*_\phi} \subseteq \preccurlyeq$.

■

定理 34

A, A' を一階述語言語、A' を A の変数拡大、$(\mathrm{A}, \mathcal{F}), (\mathrm{A}', \mathcal{F}')$ を文論対とする。A の部分集合 X が $(\mathrm{A}, \mathcal{F})$ において無矛盾ならば、X は $(\mathrm{A}', \mathcal{F}')$ においても無矛盾。

[証明] $[\mathrm{X}]_{\mathrm{Q}'} = \mathrm{A}'_\phi$ とする。Q' は偏束律に従うから、定理 22 より $[\mathrm{X}]_{\mathrm{Q}'} = \{\mathrm{y} \in \mathrm{A}'_\phi | \ \exists \alpha \in \mathcal{P}'\mathrm{X}, \ \text{s.t. } \alpha \mathrm{Q}' \mathrm{y}\}$. よって、任意の $\mathrm{y} \in \mathrm{A}_\phi$ に対して $\exists \alpha \in \mathcal{P}'\mathrm{X}$ s.t. $\alpha \mathrm{Q}' \mathrm{y}$. $\mathrm{Q}' = \preccurlyeq' |_{\mathrm{A}'^*_\phi \times \mathrm{A}'_\phi}$ より $\alpha \preccurlyeq' \mathrm{y}$. 定理 33 より $\alpha \preccurlyeq \mathrm{y}$. $\mathrm{Q} = \preccurlyeq |_{\mathrm{A}^*_\phi \times \mathrm{A}_\phi}$ より、$\alpha \mathrm{Q} \mathrm{y}$. Q は偏束律に従うから、$\mathrm{y} \in [\mathrm{X}]_\mathrm{Q}$. $\mathrm{y} \in \mathrm{A}_\phi$ は任意であったから、$[\mathrm{X}]_\mathrm{Q} = \mathrm{A}_\phi$. これは矛盾。

■

4.4 一階述語論理におけるモデルの存在定理

定理 35 (一階述語論理におけるモデルの存在定理)

A を関数記号・述語記号を高々可算個もつ一階述語言語、$(\mathrm{A}_\phi, \mathcal{F})$ を文論対とする。
A_ϕ の任意の部分集合は、無矛盾であればモデルをもつ。

[証明] A_ϕ の無矛盾な部分集合を X とする。

Var'' を可算集合とし、$\mathrm{Var}' = \mathrm{Var} \amalg \mathrm{Var}''$ とする。A と共通の算法記号系・定数系をもち、変数系が Var' であるような一階述語言語を A' とする。

A' は A の変数拡大だから $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{A}'_\phi$. 定理 34 により、X は A' においても無矛盾である。よって定理 30 の補題により、$(\mathrm{X}, \emptyset)$ は A' において $\preccurlyeq'$ に関する切断である。

A' は変数を可算個もち、A についての仮定からその関数記号・述語記号は高々可算。$\mathrm{Var}' = \mathrm{Var} \amalg \mathrm{Var}''$ で、Var'' は可算であるから、A' において X に自由に現れない変数は可算個存在する。

よって、切断のモデルの存在定理より $(\mathrm{X}, \emptyset)$ に $\mathcal{F}'$ モデルが存在する。A' は A の変数拡大だから、定理 32 により $(\mathrm{X}, \emptyset)$ には $\mathcal{F}$ モデルが存在する。よって、ある $\mathrm{f} \in \mathcal{F}$ が存在して fX=1. この f が X のモデルである。

■

参考文献

[1] 五味健作『数理心理学』
WWW 出版 (ホームページアドレス http://homepage3.nifty.com/gomiken)
[2]Herbert B.Enderton『A MATHEMATICAL INTRODUCTION TO LOGIC;SECOND EDITION』
ACADEMIC PRESS