論理体系 MCL の完全性

水村 泰明

2001 年 2 月 9 日

概 要

狭義単相格言語 A 上の論理体系 MCL を定義し，A の恒真式全ての集合と MCL で証明可能な式全ての集合が一致することを示す.

目 次

論文の要旨

数理心理学では，人間の思考を研究するための基本的な道具として**「格言語」**という形式言語を採用している．格言語には，我々が持っている直観的な「真」という概念を反映するように，意味論が定義されている．そして格言語上の論理構造を研究することで，人間の思考についての知見を得ようと考えているのである．しかしながら，現在のところ格言語上のしかるべき論理構造はまだわかっていない．

そこで，格言語の最も基本的な場合である**「単相格言語」**から研究を始めることにした．それでも一般の単相格言語は複雑なものであるので、対象を単相格言語の特殊な場合である**「狭義単相格言語」**に限ることにした．具体的な研究成果としては，狭義単相格言語 A 上のある論理体系（MCL と呼ぶ）を定義し，**「A の恒真式全体の集合と MCL で証明可能な式全体の集合が一致すること」**を証明した.（定理 4.3）

今後の展望を述べる．まず，MCL を一般の格言語上の論理体系に拡張する必要がある．拡張された MCL に対して定理 4.3 にあたる定理を証明するために，この論文で用いた方法が応用できると考えられる．MCL は，一般に Genzen 流といわれる「式から式を推論するタイプ」の論理体系である．しかし，数理心理学では「論理」を元に関する算法として捉えるので，これは数理心理学的に妥当な論理体系とはいえない．通常の論理学と異なり，どのような形式化でも良いというわけにはいかないからである．とはいっても，数理心理学的に妥当な論理体系は現在未発見であるので，将来その候補を探すときの指針として，MCL が役に立つことは間違いない．さらに，その結果有力な候補が得られた場合には，拡張された MCL と証明能力の点で同等であることを示すことで，間接的にその体系の完全性を示すことができると期待される．

0　基本概念

ここでは概念の定義と基本的な定理を紹介する．この節の内容は全て参考文献「数理心理学」に拠っているので，詳しくはそちらを参照ということで，定理の証明等は省略する．

定義 0.1 (代数系)
集合 A の有限直積 A^n $(n \in \mathbb{N})$ の部分集合 D から A への写像 α を A 上の n **項算法**という．α_λ の定義域を $\mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ ，項数を n_λ で表す．$(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合 A 上の算法の族としたとき，A と $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を**代数系**という．A を代数系の**台** (**集合**) という．代数系自体を台のみであらわしたりする．

定義 0.2 (台部分代数系)
$(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を代数系とする．$B \subseteq A$ が任意の α_λ について閉じているとき，すなわち，

$$\alpha_\lambda(B^{n_\lambda} \cap \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda) \subseteq B \qquad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

のとき，$(B,(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ を $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ の**台部分代数系**という．ただし，β_λ は α_λ の B への制限とする．$S \subseteq A$ としたとき S を含むような最小の台部分代数系が存在するが，それを $[S]$ で表すことにする．

定義 0.3 (準同形写像)
代数系 $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ から $(B,(\beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ への写像 f が，
$(a_1,\ldots,a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$ ならば $(fa_1,\ldots,fb_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda$ であって，

$$f(\alpha_\lambda(a_1,\ldots,a_{n_\lambda})) = \beta_\lambda(fa_1,\ldots,fa_{n\lambda})$$

を充たすとき，f を**準同形写像** という．準同形写像が全単射であるとき，**同形写像**という．また，準同形写像 f が，さらに，

$$(fa_1,\ldots,fa_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\beta_\lambda \text{ ならば } (a_1,\ldots,a_{n_\lambda}) \in \mathrm{Dom}\,\alpha_\lambda$$

を充たすとき，f を**狭義準同形写像**という．

定義 0.4 (型付き代数系)
代数系 $(A,(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ と $(T,(\tau_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$，さらに A から T への狭義準同形写像 σ からなる 3 つ組 (A,T,σ) を**型付き代数系**という．A を型付き代数系の**台**，T を**型代数系**，σ を**型写像**という．$a \in A$ について，$\sigma a \in T$ を a **の型**，$A_t := \sigma^{-1}t\,(t \in T)$ を A **の** t **部分**という．A を T **型の代数系**ともいう．

定義 0.5 (保型準同形写像)
(A,T,σ)，(A',T,σ') を型付き代数系，f を A から A' への準同形写像としたとき，f が $\sigma' f = \sigma$ を充たすならば f を**保型準同形写像**という．保型準同形写像が全単射であるとき，**保型同形写像**という．

定義 0.6 (普遍型付き代数系)
型付き代数系 (A,T,σ) と $S \subseteq A$ が次の 2 条件を充たすとき，4 つ組 (A,T,σ,S) を**普遍型付き代数系**という．

(i) $A = [S]$

(ii) (A',T,σ') を型付き代数系，φ を S から A' への写像で $\sigma'\varphi = \sigma$ を充たすものとするとき，φ は A から A' への保型準同形写像 f に一意に拡張される．

定理 0.1 (普遍型付き代数系の存在と一意性)
S を集合，T を代数系，τ を S から T への写像とする．このとき，普遍型付き代数系 (A, T, σ, S) で $\sigma|_S = \tau$ を充たすものが保型同形を除いて一意に存在する．

定義 0.7 (量系)
可換単位半群 $\mathbb{P}$ 上の全順序関係 $\leq$ が次の 2 条件を充たすとき，$\mathbb{P}$ を**量系**という．ただし，半群の算法を $+$，単位元を 0 とする．

(i) $\forall p, q, r \in \mathbb{P}$ に対して，$p \leq q \implies p + r \leq q + r$

(ii) $\forall p \in \mathbb{P}$ に対して，$0 \leq p$

もし量系に最大元が存在するときには，記号 ∞ で表すことにする．

定義 0.8 (狭義単相格言語)
Con，Var を集合とし，$\mathrm{Prm} = \mathrm{Con} \coprod \mathrm{Var}$ (直和) とする．
K を空でない高々可算な集合とする．K には特別な元 π があり，**格関係**という 2 項関係 $\lhd$ が定義されているものとする．ここで，$\mathcal{P}K$ に含まれない特別な 2 つの元 ε, δ $(\varepsilon \neq \delta)$ を用いて，$T := \mathcal{P}K \coprod \{\varepsilon, \delta\}$ とする．また，$\forall P \subseteq K$, $k \in K$ に対して $P^k := \{\, l \in K \,|\, l \lhd k\}$ と定義し，$\mathbb{P}$ は $\{0\}$ でない量系とする．
T に次のように代数構造を入れる．

算法 $\breve{o}k$**：** $\breve{o}k$ は 2 項算法であり，

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, \breve{o}k &:= \{\, (\varepsilon, P) \,|\, k \in P \in \mathcal{P}K, P^k \subseteq \{k\}\} \\ \varepsilon\, \breve{o}k\, P &:= P - \{k\} \end{aligned}$$

算法族 $\overline{p}k\ (p \in \mathbb{P})$**：** $\overline{p}k$ は 2 項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\, \overline{p}k := \{\, (\varepsilon, P), (\delta, P) \,|\, k \in P \in \mathcal{P}K, P^k \subseteq \{k\}\}$$
$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\, \overline{p}k\, P \\ \delta\, \overline{p}k\, P \end{array}\right\} := P - \{k\}$$

算法族 $\underline{p}k\ (p \in \mathbb{P})$**：** $\underline{p}k$ は 2 項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\, \underline{p}k := \{\, (\varepsilon, P), (\delta, P) \,|\, k \in P \in \mathcal{P}K, P^k \subseteq \{k\}\}$$
$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\, \underline{p}k\, P \\ \delta\, \underline{p}k\, P \end{array}\right\} := P - \{k\}$$

算法 $\lozenge$**：** $\lozenge$ は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\, \lozenge := \mathcal{P}K \qquad\qquad P^{\lozenge} := P$$

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：** $\wedge$，$\vee$，$\Rightarrow$ は 2 項算法であり，

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Dom} \wedge \\ \mathrm{Dom} \vee \\ \mathrm{Dom} \Rightarrow \end{array}\right\} := \mathcal{P}K \times \mathcal{P}K \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} P \wedge Q \\ P \vee Q \\ P \Rightarrow Q \end{array}\right\} := P \cup Q$$

算法 $\triangle$**：** $\triangle$ は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\triangle := \{\varepsilon, \delta\} \qquad \left.\begin{array}{l} \varepsilon\triangle \\ \delta\triangle \end{array}\right\} := \{\pi\}$$

算法 $\square$**：** $\square$ は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\square := \{\varepsilon, \delta\} \qquad \left.\begin{array}{l} \varepsilon^{\square} \\ \delta^{\square} \end{array}\right\} := \delta$$

算法 $\sqcap, \sqcup$**：** $\sqcap$，$\sqcup$ は 2 項算法であり，

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Dom}\,\sqcap \\ \mathrm{Dom}\,\sqcup \end{array}\right\} := \{\varepsilon, \delta\} \times \{\varepsilon, \delta\} \qquad \left.\begin{array}{l} x \sqcap y \\ x \sqcup y \end{array}\right\} := \delta \quad \text{（ただし，} (x, y) \in \{\varepsilon, \delta\} \times \{\varepsilon, \delta\}\text{）}$$

算法族 $\Omega x\ (x \in \mathrm{Var}_{\varepsilon})$**：** Ωx は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x := \{\emptyset\} \qquad \emptyset\,\Omega x := \delta$$

このように T に算法が入ったことで，T は代数系になった．ここで，$\tau : \mathrm{Prm} \to T$ を任意に定めれば，定理 0.1 により，普遍型付き代数系 $(A, T, \sigma, \mathrm{Prm})$ であって，$\sigma|_{\mathrm{Prm}} = \tau$ を充たすものが一意に定まる．これを，**狭義単相格言語** A と呼び，$\mathbb{P}$ をその**限量系**という．Con を**定数系**，Var を**変数系**と呼び，定数系の元を**定数**，変数系の元を**変数**という．任意の $P \in \mathcal{P}K$ に対し，P 型の元を**用元**という．K を**格集合**，格集合の元を**格**という．

注意 1

参考文献「数理心理学」では，狭義ではない単相格言語が定義されているが，概要にも書いたとおり，この論文では狭義単相格言語についてのみ研究するので，狭義ではない単相格言語の定義は割愛する．狭義ではない単相格言語について，この論文で示す定理を充たすような論理体系は，まだ見つかっていない．

定義 0.9 (狭義単相格世界)

S を任意の空でない集合とする．S には，ある反射的関係 $\ni$ と，限量系 $\mathbb{P}$ への写像 $|\cdot| : \mathcal{P}S \to \mathbb{P}$ が定義されていて，$|\cdot|$ は次の 3 条件を充たしているものとする．

$\forall X \in \mathcal{P}S$ について，

$$\begin{cases} X = \emptyset \iff |X| = 0 & \text{（正値律）} \\ X \subseteq Y \implies |X| \leq |Y| & \text{（増加律）} \\ |X \cup Y| \leq |X| + |Y| & \text{（劣加法律）} \end{cases}$$

次に，格集合を K として，

$$W := S \cup (S \to \mathbb{T}) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{P}K} ((P \to S) \to \mathbb{T})$$

と定義する．ただし，$\mathbb{T} := \{0, 1\}$，$A \to B := \{\, f \mid f : A \to B \,\}$，$(\emptyset \to S) \to \mathbb{T} := \mathbb{T}$ であり，$\mathbb{T}$ には次のように算法が定義されているものとする．

算法 $\diamondsuit$**：**

$$0^{\diamondsuit} := 1 \qquad 1^{\diamondsuit} := 0$$

算法 $\wedge$：

$$0 \wedge 0 := 0 \qquad 0 \wedge 1 := 0 \qquad 1 \wedge 0 := 0 \qquad 1 \wedge 1 := 1$$

算法 $\vee$：

$$0 \vee 0 := 0 \qquad 0 \vee 1 := 1 \qquad 1 \vee 0 := 1 \qquad 1 \vee 1 := 1$$

算法 $\Rightarrow$：

$$0 \Rightarrow 0 := 1 \qquad 0 \Rightarrow 1 := 1 \qquad 1 \Rightarrow 0 := 0 \qquad 1 \Rightarrow 1 := 1$$

型写像 $\sigma : W \to T$ を次のように定義する．

$$\sigma x := \begin{cases} \varepsilon & (x \in S) \\ \delta & (x \in (S \to \mathbb{T})) \\ P & (x \in ((P \to S) \to \mathbb{T}) \end{cases}$$

$\forall t \in T$ と $\forall X \subseteq W$ について，$X_t := X \cap \sigma^{-1} t$ と定義する．

ここで，関係 $\ni$ を次のようにして $(S \to \mathbb{T}) \times S$ 上に拡張しておく．

$$\forall a \in (S \to \mathbb{T})\,,\, s \in S \text{に対して，} \quad a \ni s \iff a(s) = 1$$

また，$\forall \theta \in ((P - \{k\}) \to S)$ と $\forall s \in S$ に対して，$(k/s)\theta \in (P \to S)$ を次のように定義する．

$$((k/s)\theta)x := \begin{cases} s & (x = k) \\ \theta x & (x \neq k) \end{cases}$$

以上の準備のもとで，W に算法を定義する．

算法 $\breve{o}k$： $\breve{o}k$ は 2 項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\breve{o}k := W_\varepsilon \times W_P \qquad (k \in P \in \mathcal{P}K, P^k \subseteq \{k\})$$
$$(s\,\breve{o}k\,f)\theta := f((k/s)\theta) \qquad (\theta \in ((P - \{k\}) \to S))$$

算法族 $\overline{p}k\,(p \in \mathbb{P})$： $\overline{p}k$ は 2 項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\overline{p}k := (W_\varepsilon \cup W_\delta) \times W_P \qquad (k \in P \in \mathcal{P}K, P^k \subseteq \{k\})$$
$$(a\,\overline{p}k\,f)\theta = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} |\{\, s \in S \mid a \ni s\,,\, f((k/s)\theta) = 1\,\}| > p \qquad (\theta \in ((P - \{k\}) \to S))$$

算法族 $\underline{p}k\,(p \in \mathbb{P})$： $\underline{p}k$ は 2 項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\underline{p}k := (W_\varepsilon \cup W_\delta) \times W_P \qquad (k \in P \in \mathcal{P}K, P^k \subseteq \{k\})$$
$$(a\,\underline{p}k\,f)\theta = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} |\{\, s \in S \mid a \ni s\,,\, f((k/s)\theta) = 0\,\}| \leq p \qquad (\theta \in ((P - \{k\}) \to S))$$

算法 $\Diamond$： $\Diamond$ は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\Diamond := W_P \qquad (P \in \mathcal{P}K) \qquad\qquad (f^{\Diamond})\theta := (f(\theta))^{\Diamond} \qquad (\theta \in ((P - \{k\}) \to S))$$

算法 $\wedge, \vee, \Rightarrow$**：** $\wedge$，$\vee$，$\Rightarrow$ は 2 項算法であり，

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Dom}\wedge\\ \mathrm{Dom}\vee\\ \mathrm{Dom}\Rightarrow\end{array}\right\} := W_P \times W_Q \qquad (P, Q \in \mathcal{P}K)$$

$$\begin{aligned}(f\wedge g)\theta &:= f(\theta|_P)\wedge f(\theta|_Q)\\ (f\vee g)\theta &:= f(\theta|_P)\vee f(\theta|_Q) \qquad (\theta \in ((P\cup Q)\to S))\\ (f\Rightarrow g)\theta &:= f(\theta|_P)\Rightarrow f(\theta|_Q)\end{aligned}$$

算法 $\triangle$**：** $\triangle$ は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\triangle := W_\varepsilon \cup W_\delta \qquad\qquad (a\triangle)\theta = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} a \ni \theta\pi \qquad (\theta \in (\{\pi\}\to S))$$

算法 $\square$**：** $\square$ は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\square := W_\varepsilon \cup W_\delta \qquad\qquad a^{\square} \ni s \overset{\mathrm{def}}{\iff} a \not\ni s \qquad (s \in S)$$

算法 $\sqcap, \sqcup$**：** $\sqcap$，$\sqcup$ は 2 項算法であり，

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Dom}\sqcap\\ \mathrm{Dom}\sqcup\end{array}\right\} := W_\varepsilon \cup W_\delta$$

$$\left.\begin{array}{l}a\sqcap b \ni s \overset{\mathrm{def}}{\iff} a \ni s \text{ かつ } b \ni s\\ a\sqcup b \ni s \overset{\mathrm{def}}{\iff} a \ni s \text{ または } b \ni s\end{array}\right. \qquad (s \in S)$$

これで，W に算法が定義されて (W, T, σ) は型付き代数系になった．この W を，狭義単相格言語 A にとって認識可能な**狭義単相格世界**という．関係 $\ni$ を**基本関係**，写像 $|\cdot| : \mathcal{P}S \to \mathbb{P}$ を**測度**という．

注意 2
単相格言語と同じく，参考文献「数理心理学」では狭義でない単相格世界が定義されているが，注意 1 と同様の理由により，ここでは狭義単相格世界のみを定義した．

定義 0.10 (付値)
$\Phi : \mathrm{Con} \to W$ が $\forall t \in T$ に対して，

$$\Phi(\mathrm{Con}_t) \subseteq W_t$$

を充たしているとき，Φ を**定付値**という．
$\nu : \mathrm{Var} \to W$ が $\forall t \in T$ に対して，

$$\nu(\mathrm{Var}_t) \subseteq W_t$$

を充たしているとき，ν を**変付値**という．変付値全体の集合を，Val で表す．
また，$\forall x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$\forall s \in W_\varepsilon$，$\forall \nu \in \mathrm{Val}$ に対して，$(x/s)\nu \in \mathrm{Val}$ を次のように定義する．
$\forall y \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に対して，

$$((x/s)\nu)y := \begin{cases} s & (y = x)\\ \nu y & (y \neq x)\end{cases}$$

定義 0.11 (W^{Val} の代数構造)
$W^{\mathrm{Val}} := \mathrm{Val} \to W$ とし，W^{Val} に狭義単相格世界では除かれていた算法 Ωx を入れる．

算法族 $\Omega x \ (x \in \mathrm{Var}_\varepsilon)$ **:** Ωx は単項算法であり，

$$\mathrm{Dom}\,\Omega x := \mathrm{Val} \to W_\emptyset$$
$$(f\,\Omega x)\nu \ni s \overset{\mathrm{def}}{\iff} f((x/s)\nu) = 1 \qquad (\nu \in \mathrm{Val}, s \in W_\varepsilon)$$

W^{Val} には冪代数系として W と同じ算法が自然に定義できるので，これで W^{Val} は T 型の代数系になった．

定義 0.12 (意味写像)
写像 $\Phi' : \mathrm{Prm} \to W^{\mathrm{Val}}$ を次のように定義する．

$$(\Phi' a)\nu := \begin{cases} \Phi a & (a \in \mathrm{Con}) \\ \nu a & (a \in \mathrm{Var}) \end{cases}$$

このとき，A の普遍性から Φ' は保型準同形写像

$$\Phi^* : A \to W^{\mathrm{Val}}$$

に一意的に拡張される．Φ^* を定付値 Φ が定める**意味写像**という．

定義 0.13 (現れの自由)
$a \in A$ の中に自由に現れる変数の集合 $\mathrm{Fvar}^a \subseteq \mathrm{Var}$ を以下のように定義する．

(i) $a \in \mathrm{Prm}$ のとき

$$\mathrm{Fvar}^a := \begin{cases} \{x\} & (a = x \in \mathrm{Var}) \\ \emptyset & (a \notin \mathrm{Var}) \end{cases}$$

(ii) $a \notin \mathrm{Prm}$ のとき
（ここで，α は A の算法を表すものとする.）

$$\mathrm{Fvar}^a := \begin{cases} \mathrm{Fvar}^b & (a = \alpha(b) \quad \text{ただし，}\alpha \neq \Omega x \text{とする.}) \\ \mathrm{Fvar}^b_1 \cup \mathrm{Fvar}^b_2 & (a = \alpha(b_1, b_2)) \\ \mathrm{Fvar}^b - \{x\} & (a = b\,\Omega x) \end{cases}$$

$x \in \mathrm{Fvar}^a$ のとき，x **は** a **に自由に現れる**という．

定理 0.2
$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ **が** $a \in A$ **に自由に現れないならば，**
$\forall s \in W_\varepsilon$ **に対して，**

$$(\Phi^* a)((x/s)\nu) = (\Phi^* a)\nu \qquad (\nu \in \mathrm{Val})$$

が成り立つ．

定義 0.14 (代入)
$\forall a \in A$ に対して，a の中の変数 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ に $s \in A_\varepsilon$ を代入したもの $a(x/s)$ を以下のように定義する．

(i) $a \in \mathrm{Prm}$ のとき

$$a(x/s) := \begin{cases} s & (a = x) \\ a & (a \neq x) \end{cases}$$

(ii) $a \notin \mathrm{Prm}$ のとき

（ここで，α は A の算法を表すものとする.）

$$a(x/s) := \begin{cases} \alpha(b(x/s)) & (a = \alpha(b) \quad \text{ただし，} \alpha \neq \Omega x \text{ とする.}) \\ \alpha(b_1(x/s), b_2(x/s)) & (a = \alpha(b_1, b_2)) \\ a & (a = b\,\Omega x) \end{cases}$$

定理 0.3 (代入値換定理)
$a \in A$，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$s \in A_\varepsilon$ **としたとき，**

$$(\Phi^*(a(x/s)))\nu = (\Phi^* a)((x/(\Phi^* s)\nu)\nu) \qquad (\nu \in \mathrm{Val})$$

が成り立つ.

定義 0.15 (用元式)
一般に任意の集合 X に対して，X の元の有限列全体を，X^* で表すことにする.
$\alpha \to \beta$ を，

$$\alpha \to \beta := (\alpha\,,\,\beta) \in \left(\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}K} A_P\right)^*\right)^2$$

と定義し，**用元式**または省略して単に**式**という.

定義 0.16 (恒真式)
用元式 $\alpha \to \beta$ が任意の定付値 Φ，変付値 ν，$\theta \in (K \to S)$ に対して，

$$\inf\{((\Phi^* a)\nu)(\theta|_{P_a}) \mid a \in \alpha\} \leq \sup\{((\Phi^* b)\nu)(\theta|_{P_b}) \mid b \in \beta\}$$

を充たしているとき，**恒真式**という．ここで，$P_f := \sigma f$ とし，$\mathbb{T}$ には $0 < 1$ という順序が入っているものとする.

1 体系 MCL′

論理体系 MCL を定義するまえに，対象を A の $\emptyset$ 型の元のみからなる式だけに制限した論理体系 MCL′ を定義して，その完全性を示すことにする．したがって，第 4 節で体系 MCL を定義するまでは，式 $\alpha \to \beta$ と書いたときには，$\alpha, \beta \in A_\emptyset^*$ であるものとする.

以下この論文中では特に断らない限り，A を狭義単相格言語，K を格集合，$\mathbb{P}$ を限量系とし，格関係は空関係もしくは対角関係であるものとする．すなわち，任意の $k, l \in K$ に対して $k \ntriangleleft l$ であるか，または $k \triangleleft k$ だけが成り立つような関係であるとする．また，ε 型の変数の集合 Var_ε は可算無限集合とする．$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする.（特に断らなければ $0 \in \mathbb{N}$ であるとする.）

1.1 省略

以下の左辺の記号列を，右辺の記号列を省略したものとして用いることにする.

- $\mathrm{one} := (x\,\breve{o}\pi\,x\triangle)\,\Omega x$ 　ただし，$x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ を１つ固定しておく．
- $|\,a\,| > p := \mathrm{one}\,\overline{p}\pi\,a\triangle$ 　$(a \in A_\varepsilon \cup A_\delta)$
- $\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f := s_1\breve{o}k_1\,(s_2\breve{o}k_2\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,f)\cdots))$
$$\begin{cases} \vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_\varepsilon^n \\ \vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n \end{cases}$$

1.2　公理

MCL′ の公理は次の (AX.1)〜(AX.3) である．

(AX.1)　$f \to f$ 　$(f \in A_\emptyset)$

(AX.2)　$\to s\,\breve{o}\pi\,s\triangle$ 　$(s \in A_\varepsilon)$

(AX.3)　$|\,a\,| > \infty \to$ 　$(a \in A_\varepsilon \cup A_\delta)$
ただし，この公理 (AX.3) は $\infty \in \mathbb{P}$ の場合，すなわち量系 $\mathbb{P}$ に最大元が存在するときのみ採用する．

1.3　推論規則

MCL′ の推論規則は次の (IR.1)〜(IR.14) である．

(IR.1)　$\dfrac{\alpha \to \beta}{\alpha' \to \beta'}$

ただし，$\alpha \subseteq \alpha', \beta \subseteq \beta'$ (集合としての包含関係) とする．

(IR.2)　$\dfrac{\alpha \to \beta\,, f \qquad f\,, \alpha \to \beta}{\alpha \to \beta}$

ただし，$f \in A_\emptyset$ とする．

(IR.3)　(a) $\dfrac{\alpha \to \beta\,, \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f}{\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f^\Diamond,\ \alpha \to \beta}$ 　　(b) $\dfrac{\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f,\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \beta\,, \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f^\Diamond}$

ただし，$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_\varepsilon^n$，$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$，$P_f = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とする．

(IR.4)　(a) $\dfrac{\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,f)\,,\ \vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,g),\ \alpha \to \beta}{\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,(f \wedge g))),\ \alpha \to \beta}$

(b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,, \vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,f) \qquad \alpha \to \beta\,, \vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,g)}{\alpha \to \beta\,, \vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,(f \wedge g)))}$

ただし，$\vec{s^j} = (s^j_1, \ldots, s^j_{n^j}) \in A_\varepsilon^{n^j}$，$\vec{k^j} = (k^j_1, \ldots, k^j_{n^j}) \in K^{n^j}$ 　$(j = 0, 1, 2)$
$P_f = \{k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^1_1, \ldots, k^1_{n^1}\}$，$P_g = \{k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^2_1, \ldots, k^2_{n^2}\}$ とする．

(IR.5) (a) $\dfrac{\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f^{\Diamond} \wedge g^{\Diamond})^{\Diamond},\ \alpha \to \beta}{\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f \vee g),\ \alpha \to \beta}$

(b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f^{\Diamond} \wedge g^{\Diamond})^{\Diamond}}{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f \vee g)}$

ただし，$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_{\varepsilon}^{n}$，$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$，$P_f \cup P_g = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とする．

(IR.6) (a) $\dfrac{\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f^{\Diamond} \vee g),\ \alpha \to \beta}{\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f \Rightarrow g),\ \alpha \to \beta}$

(b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f^{\Diamond} \vee g)}{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(f \Rightarrow g)}$

ただし，$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_{\varepsilon}^{n}$，$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$，$P_f \cup P_g = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とする．

(IR.7) (a) $\dfrac{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,a\triangle}{s\,\breve{o}\pi\,a^{\square}\triangle,\ \alpha \to \beta}$ (b) $\dfrac{s\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\ \alpha \to \beta}{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,a^{\square}\triangle}$

(IR.8) (a) $\dfrac{s\,\breve{o}\pi\,a\triangle\,,\ s\,\breve{o}\pi\,b\triangle,\ \alpha \to \beta}{s\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle,\ \alpha \to \beta}$ (b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,a\triangle \qquad \alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,b\triangle}{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,(a \sqcap b)\triangle}$

(IR.9) (a) $\dfrac{s\,\breve{o}\pi\,(a^{\square} \sqcap b^{\square})^{\square}\triangle,\ \alpha \to \beta}{s\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle,\ \alpha \to \beta}$ (b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,(a^{\square} \sqcap b^{\square})^{\square}\triangle}{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle}$

(IR.10) (a) $\dfrac{f(x/s),\ \alpha \to \beta}{s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle,\ \alpha \to \beta}$ (b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,,\ f(x/s)}{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle}$

(IR.11) (a) $\dfrac{x\,\breve{o}\pi\,a\triangle,\ \alpha \to \beta\,, x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle, \ldots, x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle}{|\,a\,| > p,\ \alpha \to \beta\,, |\,b_1\,| > q_1, \ldots, |\,b_m\,| > q_m}$ $\quad p \geq \sum_{j=1}^{m} q_j \quad (m \geq 0)$

ただし，$m = 0$ の場合 $\sum_{j=1}^{0} q_j := 0$ と定義し，x は下式に自由に現れない ε 型の変数とする．

(b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,, s\,\breve{o}\pi\,a\triangle}{\alpha \to \beta\,, |\,a\,| > 0}$

(IR.12) (a) $\dfrac{|\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x\,| > p,\ \alpha \to \beta}{\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,f),\ \alpha \to \beta}$ (b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,,\ |\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x\,| > p}{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,f)}$

ただし，$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_{\varepsilon}^{n}$，$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$，$P_f = \{k, k_1, \ldots, k_n\}$ とし，
x は f に自由に現れない ε 型の変数とする．

(IR.13) (a) $\dfrac{\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,f^{\Diamond})^{\Diamond},\ \alpha \to \beta}{\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\underline{p}k\,f),\ \alpha \to \beta}$ (b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,f^{\Diamond})^{\Diamond}}{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\underline{p}k\,f)}$

ただし，$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_{\varepsilon}^{n}$，$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n$，$P_f = \{k, k_1, \ldots, k_n\}$ とする．

(IR.14) (a) $\dfrac{\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f,\ \alpha \to \beta}{s^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}k^{\vec{\sigma}}\,f,\ \alpha \to \beta}$

(b) $\dfrac{\alpha \to \beta\,,\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,f}{\alpha \to \beta\,,s^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}k^{\vec{\sigma}}\,f}$

ただし，$\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$，$\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n)$，$P_f = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とし，σ は n 次対称群 S_n の任意の元で，$s^{\vec{\sigma}} = (s_{\sigma 1}, \ldots, s_{\sigma n})$，$k^{\vec{\sigma}} = (k_{\sigma 1}, \ldots, k_{\sigma n})$ とする．

1.4 諸定義

ここでは，MCL′ に関する用語をいくつか定義する．

定義 1.1 (推論式の上式と下式)
一般に推論式,

$$\frac{\alpha_1 \to \beta_1 \ \ \cdots \ \ \alpha_n \to \beta_n}{\alpha \to \beta}$$

について，$\alpha_i \to \beta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ をこの推論式の**上式**，$\alpha \to \beta$ を**下式**という．

定義 1.2 (MCL′ で証明可能な式)
(1) 公理 (AX.1)〜(AX.3) は MCL′ **で証明可能**な式である．

(2) 推論規則 (IR.1)〜(IR.14) について，
上式が全て MCL′ **で証明可能**な式ならば下式も MCL′ **で証明可能**な式である．

(3) (1)，(2) で得られるもののみが MCL′ **で証明可能**な式である．

定義 1.3 (健全性と完全性)
MCL′ で証明可能な式が全て恒真式であるとき，MCL′ は**健全である**ということにする．
さらに，$\emptyset$ 型の元のみからなる恒真式が全て MCL′ で証明可能であるとき，MCL′ は**完全である**ということにする．

注意 3
これは参考文献「数理心理学」での用語の定義と異なるが，この論文中での便宜的な用語であることを断っておく．

2 MCL′ の健全性

2.1 公理の恒真性

ここでは，公理 (AX.1)〜(AX.3) が恒真式であることを示す．以下，W を狭義単相格世界，Φ を定付値，ν を変付値とする．

(AX.1) $\forall f \in A_\emptyset$ に対して，$(\Phi^* f)\nu \leq (\Phi^* f)\nu$ は明らか．したがって，式 $f \to f$ は恒真式である．

(AX.2) 基本関係 $\ni$ は反射的なので，$\forall s \in A_\varepsilon$ について $(\Phi^* s)\nu \ni (\Phi^* s)\nu$.
ゆえに，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, s\triangle))\nu = (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* s)\nu\triangle = 1$.
したがって，式 $\quad \to s\,\breve{o}\pi\, s\triangle$ は恒真式である．

(AX.3) $\infty \in \mathbb{P}$ とする．定義から ∞ は $\mathbb{P}$ の最大元なので，
$\forall a \in A_\varepsilon \cup A_\delta$ について，$|\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}| \leq \infty$.
ゆえに，$(\Phi^*(\mathrm{one}\,\overline{\infty}\pi a\triangle))\nu = 0$．すなわち，$(\Phi^*(|a| > \infty))\nu = 0$.
したがって，式 $|a| > \infty \to \quad$ は恒真式である．

以上の考察から，次の補題が得られた．

補題 2.1
MCL′ の公理 (AX.1)〜(AX.3) は恒真式である．

2.2 推論規則の健全性

ここでは，推論規則 (IR.1)〜(IR.14) が「上式が全て恒真式ならば下式も恒真式である」という性質を持つことを示す．以下，W を狭義単相格世界，Φ を定付値，ν を変付値とする．

(IR.1) $\alpha \subseteq \alpha'$ より，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha'\} \leq \inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\}$.
$\beta \subseteq \beta'$ より，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta'\} \geq \sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\}$.
上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} \leq \sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\}$.
ゆえに上の不等式を使って，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha'\} \leq \sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta'\}$.
したがって，下式は恒真式である．

(IR.2) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$ とする．
上左式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ または $(\Phi^* f)\nu = 1$.
$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のとき，下式は真である．
一方 $(\Phi^* f)\nu = 1$ のときも，上右式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
どちらにせよ下式は恒真式である．

(IR.3) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f^\diamondsuit))\nu = 1$ とする．

$$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f^\diamondsuit))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\, f^\diamondsuit)\cdots)))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* f)\nu^\diamondsuit)\cdots) = 1$$
$$\iff ((\Phi^* f)\nu^\diamondsuit)\theta = 1$$

（ここで，$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする．）

$$\iff ((\Phi^* f)\nu)\theta = 0$$

$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\, \breve{o}k_1\, (\cdots((\Phi^* s_n)\nu\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu)\cdots) = 0$$
$$\iff (\Phi^*(s_1\, \breve{o}k_1\, (\cdots(s_n\, \breve{o}k_n\, f)\cdots)))\nu = 0$$
$$\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f))\nu = 0$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である．
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f^{\diamond}))\nu = 0$ とする．

$$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f^{\diamond}))\nu = 0$$
$$\iff (\Phi^*(s_1\, \breve{o}k_1\, (\cdots(s_n\, \breve{o}k_n\, f^{\diamond})\cdots)))\nu = 0$$
$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\, \breve{o}k_1\, (\cdots((\Phi^* s_n)\nu\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu^{\diamond})\cdots) = 0$$
$$\iff ((\Phi^* f)\nu^{\diamond})\theta = 0$$

（ここで，$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする．）

$$\iff ((\Phi^* f)\nu)\theta = 1$$
$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\, \breve{o}k_1\, (\cdots((\Phi^* s_n)\nu\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu)\cdots) = 1$$
$$\iff (\Phi^*(s_1\, \breve{o}k_1\, (\cdots(s_n\, \breve{o}k_n\, f)\cdots)))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f))\nu = 1$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である．

(IR.4) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(\vec{s^0}\, \breve{o}\vec{k^0}\, (\vec{s^1}\, \breve{o}\vec{k^1}\, (\vec{s^2}\, \breve{o}\vec{k^2}\, (f \wedge g)))))\nu = 1$ とする．

$$(\Phi^*(\vec{s^0}\, \breve{o}\vec{k^0}\, (\vec{s^1}\, \breve{o}\vec{k^1}\, (\vec{s^2}\, \breve{o}\vec{k^2}\, (f \wedge g)))))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^*\vec{s^0})\nu\, \breve{o}\vec{k^0}\, ((\Phi^*\vec{s^1})\nu\, \breve{o}\vec{k^1}\, ((\Phi^*\vec{s^2}\nu)\, \breve{o}\vec{k^2}\, ((\Phi^* f)\nu \wedge (\Phi^* g)\nu))) = 1$$

（ここで，$(\Phi^*\vec{s^j})\nu := ((\Phi^* s^j_1)\nu, \ldots, (\Phi^* s^j_{n^j})\nu) \in W_\varepsilon^{n^j} \quad (j = 0, 1, 2)$ とする．）

$$\iff (((\Phi^* f)\nu) \wedge ((\Phi^* g)\nu))\theta = 1$$

（ここで，$\theta \in (P_f \cup P_g \to S)$ は，

$$\theta k^j_i = (\Phi^* s^j_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n^j\ ;\ j = 0, 1, 2)$$

と定義されているものとする．）

$$\iff ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1 \text{ かつ } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 1$$
$$\iff (\Phi^*\vec{s^0})\nu\, \breve{o}\vec{k^0}\, ((\Phi^*\vec{s^1})\nu\, \breve{o}\vec{k^1}\, (\Phi^* f)\nu) = 1 \text{ かつ } (\Phi^*\vec{s^0})\nu\, \breve{o}\vec{k^0}\, ((\Phi^*\vec{s^2})\nu\, \breve{o}\vec{k^2}\, (\Phi^* g)\nu) = 1$$
$$\iff (\Phi^*(\vec{s^0}\, \breve{o}\vec{k^0}\, (\vec{s^1}\, \breve{o}\vec{k^1}\, f)))\nu = 1 \text{ かつ } (\Phi^*(\vec{s^0}\, \breve{o}\vec{k^0}\, (\vec{s^2}\, \breve{o}\vec{k^2}\, g)))\nu = 1$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である.
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,(f \wedge g)))))\nu = 0$ とする.

$$
\begin{aligned}
&(\Phi^*(\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,(f \wedge g)))))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*\vec{s^0})\nu\,\breve{o}\vec{k^0}\,((\Phi^*\vec{s^1})\nu\,\breve{o}\vec{k^1}\,((\Phi^*\vec{s^2}\nu)\,\breve{o}\vec{k^2}\,((\Phi^* f)\nu \wedge (\Phi^* g)\nu))) = 0 \\
&\quad\text{（ここで，}(\Phi^*\vec{s^j})\nu := ((\Phi^* s^j_1)\nu, \ldots, (\Phi^* s^j_{n^j})\nu) \in W_\varepsilon^{n^j} \quad (j = 0,1,2)\text{ とする.）} \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* f)\nu) \wedge ((\Phi^* g)\nu))\theta = 0 \\
&\quad\text{（ここで，}\theta \in (P_f \cup P_g \to S)\text{ は，} \\
&\qquad \theta k^j_i = (\Phi^* s^j_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n^j\ ;\ j = 0,1,2) \\
&\quad\text{と定義されているものとする.）} \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0 \text{ または } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*\vec{s^0})\nu\,\breve{o}\vec{k^0}\,((\Phi^*\vec{s^1})\nu\,\breve{o}\vec{k^1}\,(\Phi^* f)\nu) = 0 \text{ または } (\Phi^*\vec{s^0})\nu\,\breve{o}\vec{k^0}\,((\Phi^*\vec{s^2})\nu\,\breve{o}\vec{k^2}\,(\Phi^* g)\nu) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,f)))\nu = 0 \text{ または } (\Phi^*(\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,g)))\nu = 0
\end{aligned}
$$

前者の場合は，上左式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
後者の場合は，上右式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
どちらにせよ下式は恒真式である.

(IR.5) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \vee g)))\nu = 1$ とする.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \vee g)))\nu = 1 &\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f \vee g))\cdots)))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu \vee (\Phi^* g)\nu))\cdots) = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu \vee (\Phi^* g)\nu)\theta = 1 \\
&\quad\text{（ここで，}\theta \in (P_f \to S)\text{ は，} \\
&\qquad \theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n) \\
&\quad\text{と定義されているものとする.）} \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1 \text{ または } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu^\Diamond)(\theta|_{P_f}) = 0 \text{ または } ((\Phi^* g)\nu^\Diamond)(\theta|_{P_g}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu^\Diamond \wedge (\Phi^* g)\nu^\Diamond)\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* f)\nu^\Diamond \wedge (\Phi^* g)\nu^\Diamond)^\Diamond)\theta = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu^\Diamond \wedge (\Phi^* g)\nu^\Diamond)^\Diamond)\cdots) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f^\Diamond \wedge g^\Diamond)^\Diamond)\cdots)))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f^\Diamond \wedge g^\Diamond)^\Diamond))\nu = 1
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である.

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である.
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \vee g)))\nu = 0$ とする.

$$
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \vee g)))\nu = 0 \Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f \vee g))\cdots)))\nu = 0
$$

$$\begin{aligned}
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu \vee (\Phi^* g)\nu))\cdots) = 0\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu \vee (\Phi^* g)\nu)\theta = 0
\end{aligned}$$

（ここで，$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \dots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\begin{aligned}
&\iff ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0 \text{ かつ } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 0\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu^\Diamond)(\theta|_{P_f}) = 1 \text{ かつ } ((\Phi^* g)\nu^\Diamond)(\theta|_{P_g}) = 1\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu^\Diamond \wedge (\Phi^* g)\nu^\Diamond)\theta = 1\\
&\iff (((\Phi^* f)\nu^\Diamond \wedge (\Phi^* g)\nu^\Diamond)^\Diamond)\theta = 0\\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu^\Diamond \wedge (\Phi^* g)\nu^\Diamond)^\Diamond)\cdots) = 0\\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f^\Diamond \wedge g^\Diamond)^\Diamond)\cdots)))\nu = 0\\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f^\Diamond \wedge g^\Diamond)^\Diamond))\nu = 0
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である.

(IR.6)　(a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \Rightarrow g)))\nu = 1$ とする.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \Rightarrow g)))\nu = 1 &\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f \Rightarrow g))\cdots)))\nu = 1\\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu \Rightarrow (\Phi^* g)\nu))\cdots) = 1\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu \Rightarrow (\Phi^* g)\nu)\theta = 1
\end{aligned}$$

（ここで，$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \dots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\begin{aligned}
&\iff ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0 \text{ または } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 1\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu^\Diamond)(\theta|_{P_f}) = 1 \text{ または } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 1\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu^\Diamond \vee (\Phi^* g)\nu)\theta = 1\\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu^\Diamond \vee (\Phi^* g)\nu))\cdots) = 1\\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f^\Diamond \vee g))\cdots)))\nu = 1\\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f^\Diamond \vee g)))\nu = 1
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である.

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である.
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \Rightarrow g)))\nu = 0$ とする.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f \Rightarrow g)))\nu = 0 &\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(f \Rightarrow g))\cdots)))\nu = 0\\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* f)\nu \Rightarrow (\Phi^* g)\nu))\cdots) = 0\\
&\iff ((\Phi^* f)\nu \Rightarrow (\Phi^* g)\nu)\theta = 0
\end{aligned}$$

（ここで，$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1 \text{ かつ } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 0\\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu^{\Diamond})(\theta|_{P_f}) = 0 \text{ かつ } ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) = 0\\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu^{\Diamond} \vee (\Phi^* g)\nu)\theta = 0\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu\, \breve{o} k_1\, (\cdots((\Phi^* s_n)\nu\, \breve{o} k_n\, ((\Phi^* f)\nu^{\Diamond} \vee (\Phi^* g)\nu))\cdots) = 0\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1\, \breve{o} k_1\, (\cdots(s_n\, \breve{o} k_n\, (f^{\Diamond} \vee g))\cdots)))\nu = 0\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s}\, \breve{o} \vec{k}\, (f^{\Diamond} \vee g)))\nu = 0
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である.

(IR.7) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a^{\Box}\triangle))\nu = 1$ とする.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a^{\Box}\triangle))\nu = 1 &\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\, \breve{o}\pi\, (\Phi^* a)\nu^{\Box}\triangle = 1\\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a)\nu^{\Box})\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu^{\Box} \exists\, (\Phi^* s)\nu\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu \nexists\, (\Phi^* s)\nu\\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\, \breve{o}\pi\, (\Phi^* a)\nu\triangle = 0\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 0
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である.

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である.
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a^{\Box}\triangle))\nu = 0$ とする.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a^{\Box}\triangle))\nu = 0 &\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\, \breve{o}\pi\, (\Phi^* a)\nu^{\Box}\triangle = 0\\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a)\nu^{\Box})\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu^{\Box} \nexists\, (\Phi^* s)\nu\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu \exists\, (\Phi^* s)\nu\\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\, \breve{o}\pi\, (\Phi^* a)\nu\triangle = 1\\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 1
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である.

(IR.8) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, (a \sqcap b)\triangle))\nu = 1$ とする.

$$(\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, (a \sqcap b)\triangle))\nu = 1 \Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\, \breve{o}\pi\, ((\Phi^* a)\nu \sqcap (\Phi^* b)\nu)\triangle = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\iff (((\Phi^* a)v \sqcap (\Phi^* b)v)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* a)v \sqcap (\Phi^* b)v) \ni (\Phi^* s)v \\
&\iff (\Phi^* a)v \ni (\Phi^* s)v \text{ かつ } (\Phi^* b)v \ni (\Phi^* s)v \\
&\iff ((\Phi^* a)v\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 1 \text{ かつ } ((\Phi^* b)v\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 1 \\
&\iff (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, (\Phi^* a)v\triangle = 1 \text{ かつ } (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, (\Phi^* b)v\triangle = 1 \\
&\iff (\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, a\triangle))v = 1 \text{ かつ } (\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, b\triangle))v = 1
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)v \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^* g)v \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である．
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)v \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, (a \sqcap b)\triangle))v = 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, (a \sqcap b)\triangle))v = 0 &\iff (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, ((\Phi^* a)v \sqcap (\Phi^* b)v)\triangle = 0 \\
&\iff (((\Phi^* a)v \sqcap (\Phi^* b)v)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 0 \\
&\iff ((\Phi^* a)v \sqcap (\Phi^* b)v) \not\ni (\Phi^* s)v \\
&\iff (\Phi^* a)v \not\ni (\Phi^* s)v \text{ または } (\Phi^* b)v \not\ni (\Phi^* s)v \\
&\iff ((\Phi^* a)v\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 0 \text{ または } ((\Phi^* b)v\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 0 \\
&\iff (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, (\Phi^* a)v\triangle = 0 \text{ または } (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, (\Phi^* b)v\triangle = 0 \\
&\iff (\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, a\triangle))v = 0 \text{ または } (\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, b\triangle))v = 0
\end{aligned}
$$

前者の場合は，上左式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)v \mid f \in \alpha\} = 0$.
後者の場合は，上右式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)v \mid f \in \alpha\} = 0$.
どちらにせよ下式は恒真式である．

(IR.9) (a) $\inf\{(\Phi^* f)v \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)v \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, (a \sqcup b)\triangle))v = 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, (a \sqcup b)\triangle))v = 1 &\iff (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, ((\Phi^* a)v \sqcup (\Phi^* b)v)\triangle = 1 \\
&\iff (((\Phi^* a)v \sqcup (\Phi^* b)v)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* a)v \sqcup (\Phi^* b)v) \ni (\Phi^* s)v \\
&\iff (\Phi^* a)v \ni (\Phi^* s)v \text{ または } (\Phi^* b)v \ni (\Phi^* s)v \\
&\iff (\Phi^* a)v^{\square} \not\ni (\Phi^* s)v \text{ または } (\Phi^* b)v^{\square} \not\ni (\Phi^* s)v \\
&\iff ((\Phi^* a)v^{\square} \sqcap (\Phi^* b)v^{\square}) \not\ni (\Phi^* s)v \\
&\iff ((\Phi^* a)v^{\square} \sqcap (\Phi^* b)v^{\square})^{\square} \ni (\Phi^* s)v \\
&\iff (((\Phi^* a)v^{\square} \sqcap (\Phi^* b)v^{\square})^{\square}\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 1 \\
&\iff (\Phi^* s)v\, \breve{\circ}\pi\, ((\Phi^* a)v^{\square} \sqcap (\Phi^* b)v^{\square})^{\square}\triangle = 1 \\
&\iff (\Phi^*(s\, \breve{\circ}\pi\, (a^{\square} \sqcap b^{\square})^{\square}\triangle))v = 1
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)v \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である．
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle))\nu = 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a \sqcup b)\triangle))\nu = 0 &\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* a)\nu \sqcup (\Phi^* b)\nu)\triangle = 0 \\
&\iff (((\Phi^* a)\nu \sqcup (\Phi^* b)\nu)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu \sqcup (\Phi^* b)\nu) \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (\Phi^* a)\nu \nexists (\Phi^* s)\nu \text{ かつ } (\Phi^* b)\nu \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (\Phi^* a)\nu^{\square} \exists (\Phi^* s)\nu \text{ かつ } (\Phi^* b)\nu^{\square} \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu^{\square} \sqcap (\Phi^* b)\nu^{\square}) \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu^{\square} \sqcap (\Phi^* b)\nu^{\square})^{\square} \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (((\Phi^* a)\nu^{\square} \sqcap (\Phi^* b)\nu^{\square})^{\square}\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* a)\nu^{\square} \sqcap (\Phi^* b)\nu^{\square})^{\square}\triangle = 0 \\
&\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a^{\square} \sqcap b^{\square})^{\square}\triangle))\nu = 0
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である．

(IR.10) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle))\nu = 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle))\nu = 1 &\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* f)\,\Omega x)\nu\triangle = 1 \\
&\iff (((\Phi^* f)\,\Omega x)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* f)\,\Omega x)\nu \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (\Phi^* f)((x/(\Phi^* s)\nu)\nu) = 1 \\
&\iff (\Phi^*(f(x/s)))\nu = 1
\end{aligned}
$$

（ここで，代入値換定理より，

$$(\Phi^*(f(x/s)))\nu = (\Phi^* f)((x/(\Phi^* s)\nu)\nu)$$

が成り立つことを用いた．）

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である．
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle))\nu = 0$ とする．

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x)\triangle))\nu = 0 &\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* f)\,\Omega x)\nu\triangle = 0 \\
&\iff (((\Phi^* f)\,\Omega x)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\iff ((\Phi^* f)\,\Omega x)\nu \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (\Phi^* f)((x/(\Phi^* s)\nu)\nu) = 0 \\
&\iff (\Phi^*(f(x/s)))\nu = 0
\end{aligned}
$$

（ここで，代入値換定理より，

$$(\Phi^*(f(x/s)))\nu = (\Phi^* f)((x/(\Phi^* s)\nu)\nu)$$

が成り立つことを用いた.)

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である.

(IR.11) (a) パラメータ m の値で場合分けする.

(i) $m = 0$ のとき

$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(|a| > p))\nu = 1$ とする.

$$(\Phi^*(|a| > p))\nu = 1 \iff (\Phi^*(\mathrm{one}\,\overline{p}\pi\, a\triangle))\nu = 1$$
$$\iff |\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}| > p$$

また，$|\emptyset| = 0$ なので，$\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\} \neq \emptyset$
ゆえに，ある $s_0 \in S$ であって $(\Phi^* a)\nu \ni s_0$ となるものが存在する.
ここで，a に x は自由に現れないので，$(\Phi^* a)\nu = (\Phi^* a)((x/s_0)\nu) \quad (\forall \nu \in \mathrm{Val})$.
したがって，$s_0 = (\Phi^* x)((x/s_0)\nu)$ であることを使うと，
$(\Phi^* a)((x/s_0)\nu) \ni (\Phi^* x)((x/s_0)\nu)$ が成り立つ.
すなわち，$(\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\, a\triangle))((x/s_0)\nu) = 1$ である.
また，$\forall f \in \alpha$ に対しても x は f に自由に現れないので，
$(\Phi^* f)\nu = (\Phi^* f)((x/s_0)\nu) \quad (\forall \nu \in \mathrm{Val})$.
ゆえに，$\inf\{(\Phi^* f)((x/s_0)\nu) \mid f \in \alpha\} = 1$.
上式の恒真性より，$\sup\{(\Phi^* g)((x/s_0)\nu) \mid g \in \beta\} = 1$.
$\forall g \in \beta$ に対しても x は g に自由に現れないので，
$(\Phi^* g)\nu = (\Phi^* g)((x/s_0)\nu) \quad (\forall \nu \in \mathrm{Val})$
ゆえに，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である.

(ii) $m > 0$ のとき

$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(|a| > p))\nu = 1$ とする.
また，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ ならば下式は真なので，
$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$ としておく.
はじめに，

$$\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \{s \in S \mid (\Phi^* b_j)\nu \ni s\}$$

を示すことにする.
そこで，$s \in \{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}$，すなわち $(\Phi^* a)\nu \ni s$ とする.
x は a に自由に現れないので，$(\Phi^* a)\nu = (\Phi^* a)((x/s)\nu)$.
ゆえに，$s = (\Phi^* x)((x/s)\nu)$ であることを使うと，$(\Phi^* a)((x/s)\nu) \ni (\Phi^* x)((x/s)\nu)$.
これより，$(\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\, a\triangle))((x/s)\nu) = 1$.
一方 $\forall f \in \alpha$ について，x は f に自由に現れないので，$(\Phi^* f)\nu = (\Phi^* f)((x/s)\nu)$.
したがって，$\inf\{(\Phi^* f)((x/s)\nu) \mid f \in \alpha\} = 1$.
同様に $\forall g \in \beta$ について，x は g に自由に現れないので，$(\Phi^* g)\nu = (\Phi^* g)((x/s)\nu)$.

したがって，$\sup\{(\Phi^*g)((x/s)\nu) \mid g \in \beta\} = 0$.
これらと上式の恒真性より，
$\exists j\ (1 \le j \le m) \quad (\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\, b_j \triangle))((x/s)\nu) = 1$.
すなわち，$s\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* b_j)((x/s)\nu)\triangle = 1$.
x は b_j にも自由に現れないので，$(\Phi^* b_j)\nu = (\Phi^* b_j)((x/s)\nu)$.
したがって，$s\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* b_j)\nu = 1$．すなわち，$(\Phi^* b_j)\nu \ni s$ である．
よって，

$$s \in \bigcup_{j=1}^{m} \{s \in S \mid (\Phi^* b_j)\nu \ni s\}$$

であることが示された．

$$\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \{s \in S \mid (\Phi^* b_j)\nu \ni s\}$$

と，測度の定義より，

$$|\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}| \le \sum_{j=1}^{m} |\{s \in S \mid (\Phi^* b_j)\nu \ni s\}|$$

である．今，$(\Phi^*(|\,a\,| > p))\nu = 1$ としているので，$|\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}| > p$.
ゆえに，

$$p < \sum_{j=1}^{m} |\{s \in S \mid (\Phi^* b_j)\nu \ni s\}| \qquad \cdots(\sharp)$$

である．
ここで，もし $\forall j = 1, \ldots, m$ について $(\Phi^*(|\,b_j\,| > q_j))\nu = 0$ だとすると，

$$|\{s \in S \mid (\Phi^* b_j)\nu \ni s\}| \le q_j \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

となるので，$(\sharp)$ とあわせると $p < \sum_{j=1}^{m} q_j$ を得るが，これは矛盾．
ゆえに少なくとも 1 つの j に対しては $(\Phi^*(|\,b_j\,| > q_j))\nu = 1$ でなくてはならない．したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^*g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である．
そこで，$\sup\{(\Phi^*g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(|\,a\,| > 0))\nu = 0$ とする．
$(\Phi^*(|\,a\,| > 0))\nu = 0$ より，$|\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\}| = 0$.
ゆえに，$\{s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s\} = \emptyset$ である．
したがって，$\forall s \in A_\varepsilon$ に対して $(\Phi^* a)\nu \not\ni (\Phi^* s)\nu$ が成り立っている．
これより，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0$.
上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である．

(IR.12) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\, f)))\nu = 1$ とする．

$$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}(a\,\overline{p}k\, f)))\nu = 1 \Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\overline{p}k\, f))\cdots)))\nu = 1$$

$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* f)\nu) = 1$$

$$\iff ((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* f)\nu)\theta = 1$$

（ここで，$\theta \in (P_f - \{k\} \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする．）

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* f)\nu)((k/s)\theta) = 1 \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* f)((x/s)\nu))((k/s)\theta) = 1 \,\}| > p$$

（ここで，x は f に自由に現れないので，

$$(\Phi^* f)\nu = (\Phi^* f)((x/s)\nu) \quad (\forall\, \nu \in \mathrm{Val})$$

が成り立つことを用いた．）

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, (s\,\breve{o}k\,(\Phi^* f)((x/s)\nu))\theta = 1 \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* x)((x/s)\nu)\,\breve{o}k\,(\Phi^* f)((x/s)\nu))\theta = 1 \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* (x\,\breve{o}k\,f))((x/s)\nu))\theta = 1 \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, (\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f)))((x/s)\nu) = 1 \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f)))\,\Omega x)\nu\,\exists\, s \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* a)\nu \sqcap (\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x)\nu)\,\exists\, s \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x))\nu\,\exists\, s \,\}| > p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x))\nu\triangle)(\pi/s) = 1 \,\}| > p$$

$$\iff (\Phi^* one)\nu\,\overline{p}\pi\,(\Phi^* (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x))\nu\triangle = 1$$

$$\iff (\Phi^* (one\,\overline{p}\pi\,(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x)\triangle))\nu = 1$$

$$\iff (\Phi^* (|\, a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x \,| > p))\nu = 1$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\,\} = 1$．
したがって，下式は恒真式である．

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\,\} = 1$ のときは下式は真である．
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\,\} = 0$，$(\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,f)))\nu = 0$ とする．

$$(\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}(a\,\overline{p}k\,f)))\nu = 0 \iff (\Phi^* (s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\overline{p}k\,f))\cdots)))\nu = 0$$

$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* f)\nu) = 0$$

$$\iff ((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* f)\nu)\theta = 0$$

（ここで，$\theta \in (P_f - \{k\} \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする．）

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* f)\nu)((k/s)\theta) = 1 \,\}| \leq p$$

$$\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu\,\exists\, s, ((\Phi^* f)((x/s)\nu))((k/s)\theta) = 1 \,\}| \leq p$$

（ここで，x は f に自由に現れないので，

$$(\Phi^* f)\nu = (\Phi^* f)((x/s)\nu) \quad (\forall\, \nu \in \mathrm{Val})$$

が成り立つことを用いた．）

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, (s \,\breve{o}k\, (\Phi^* f)((x/s)\nu))\theta = 1 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* x)((x/s)\nu) \,\breve{o}k\, (\Phi^* f)((x/s)\nu))\theta = 1 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* (x \,\breve{o}k\, f))((x/s)\nu))\theta = 1 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, (\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f)))((x/s)\nu) = 1 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f)))\, \Omega x)\nu \,\exists\, s \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* a)\nu \sqcap (\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f))\, \Omega x)\nu) \,\exists\, s \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f))\, \Omega x))\nu \,\exists\, s \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f))\, \Omega x))\nu \triangle)(\pi/s) = 1 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* one)\nu\, \overline{p}\pi\, (\Phi^* (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f))\, \Omega x))\nu \triangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* (one\, \overline{p}\pi\, (a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f))\, \Omega x) \triangle))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* (|\, a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (x \,\breve{o}k\, f))\, \Omega x \,| > p))\nu = 0
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である.

(IR.13) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (a \underline{p} k\, f)))\nu = 1$ とする.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k} (a \underline{p} k\, f)))\nu = 1 &\Longleftrightarrow (\Phi^* (s_1 \,\breve{o}k_1\, (\cdots (s_n \,\breve{o}k_n\, (a \underline{p} k\, f)) \cdots)))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu \,\breve{o}k\, (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \,\breve{o}k\, ((\Phi^* a)\nu \underline{p} k\, (\Phi^* f)\nu)) \cdots) = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu \underline{p} k\, (\Phi^* f)\nu)\theta = 1
\end{aligned}
$$

（ここで，$\theta \in (P_f - \{k\} \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* f)\nu)((k/s)\theta) = 0 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* f)\nu)^{\Diamond}((k/s)\theta) = 1 \,\}| \leq p \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu\, \overline{p} k\, (\Phi^* f)\nu^{\Diamond})\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu\, \overline{p} k\, (\Phi^* f)\nu^{\Diamond})^{\Diamond}\theta = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu \,\breve{o}k\, (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \,\breve{o}k\, ((\Phi^* a)\nu\, \overline{p} k\, (\Phi^* f)\nu^{\Diamond})^{\Diamond}) \cdots) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* (s_1 \,\breve{o}k_1\, (\cdots (s_n \,\breve{o}k_n\, (a\, \overline{p} k\, f^{\Diamond})^{\Diamond}) \cdots)))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (a\, \overline{p} k\, f^{\Diamond})^{\Diamond}))\nu = 1
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である.

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である.
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, (a \underline{p} k\, f)))\nu = 0$ とする.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^* (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k} (a \underline{p} k\, f)))\nu = 0 &\Longleftrightarrow (\Phi^* (s_1 \,\breve{o}k_1\, (\cdots (s_n \,\breve{o}k_n\, (a \underline{p} k\, f)) \cdots)))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu \,\breve{o}k\, (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \,\breve{o}k\, ((\Phi^* a)\nu \underline{p} k\, (\Phi^* f)\nu)) \cdots) = 0 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu \underline{p} k\, (\Phi^* f)\nu)\theta = 0
\end{aligned}
$$

（ここで，$\theta \in (P_f - \{k\} \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow |\{ s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* f)\nu)((k/s)\theta) = 0 \}| > p \\
&\Longleftrightarrow |\{ s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* f)\nu)^{\Diamond}((k/s)\theta) = 1 \}| > p \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu \overline{p} k (\Phi^* f)\nu^{\Diamond})\theta = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu \overline{p} k (\Phi^* f)\nu^{\Diamond})^{\Diamond}\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu \breve{o} k (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \breve{o} k ((\Phi^* a)\nu \overline{p} k (\Phi^* f)\nu^{\Diamond})^{\Diamond}) \cdots) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1 \breve{o} k_1 (\cdots (s_n \breve{o} k_n (a \overline{p} k f^{\Diamond})^{\Diamond}) \cdots)))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s} \breve{o} \vec{k} (a \overline{p} k f^{\Diamond})^{\Diamond}))\nu = 0
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である.

(IR.14) (a) $\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である.
そこで，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 1$，$(\Phi^*(s^{\vec{\sigma}} \breve{o} k^{\vec{\sigma}} f))\nu = 1$ とする.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(s^{\vec{\sigma}} \breve{o} k^{\vec{\sigma}} f))\nu = 1 &\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_{\sigma 1} \breve{o} k_{\sigma 1} (\cdots (s_{\sigma n} \breve{o} k_{\sigma n} f) \cdots)))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_{\sigma 1}))\nu \breve{o} k_{\sigma 1} (\cdots ((\Phi^*(s_{\sigma n}))\nu \breve{o} k (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu)\theta = 1
\end{aligned}$$

（ここで,$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu \breve{o} k_1 (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \breve{o} k_n (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1 \breve{o} k_1 (\cdots (s_n \breve{o} k_n f) \cdots)))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s} \breve{o} \vec{k} f))\nu = 1
\end{aligned}$$

上式の恒真性から，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$.
したがって，下式は恒真式である.

(b) $\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 1$ のときは下式は真である.
そこで，$\sup\{(\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta\} = 0$，$(\Phi^*(s^{\vec{\sigma}} \breve{o} k^{\vec{\sigma}} f))\nu = 0$ とする.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(s^{\vec{\sigma}} \breve{o} k^{\vec{\sigma}} f))\nu = 0 &\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_{\sigma 1} \breve{o} k_{\sigma 1} (\cdots (s_{\sigma n} \breve{o} k_{\sigma n} f) \cdots)))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_{\sigma 1}))\nu \breve{o} k_{\sigma 1} (\cdots ((\Phi^*(s_{\sigma n}))\nu \breve{o} k (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 0 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* f)\nu)\theta = 0
\end{aligned}$$

（ここで,$\theta \in (P_f \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu \breve{o} k_1 (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \breve{o} k_n (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1 \breve{o} k_1 (\cdots (s_n \breve{o} k_n f) \cdots)))\nu = 0
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,f))\nu = 0$$

上式の恒真性から，$\inf\{(\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha\} = 0$.
したがって，下式は恒真式である．

以上の考察から，次の補題が得られた．

補題 2.2
MCL′ の推論規則 (IR.1)〜(IR.14) **は，上式が全て恒真式であれば下式も恒真式である．**

2.3 MCL′ の健全性

定理 2.1 (MCL′ の健全性)
MCL′ で証明可能な式は全て恒真式である．

証明
MCL′ で証明可能な式の定義 1.2 に基いて，式 $\alpha \to \beta$ の証明のために推論規則の使われた回数 n に関する帰納法で示す．

(i) $n = 0$ のとき
$n = 0$，すなわち一度も推論規則を用いずに MCL′ で証明可能な式は公理に限られる．公理の場合は，補題 2.1 から恒真式であることがわかる．

(ii) $n > 0$ のとき
この場合，式 $\alpha \to \beta$ の証明の最後に用いた推論規則に注目する．この推論規則の上式は定義より全て MCL′ で証明可能であり，帰納法の仮定からそれらは恒真式である．そこで補題 2.2 を使えば，最後に用いた推論規則の下式は恒真式であることがわかる．すなわち，式 $\alpha \to \beta$ は恒真式である．

□

3 MCL′ の完全性

3.1 分解式

ここでは，各算法記号に対し,「分解式」という新しい推論式を定義する．各分解式は下式によって上式の形が決まる．そこで，下式を分解して上式を得るということもある．分解式を用いた一階述語論理の完全性の証明が，参考文献「集合論」に載っている．

(DR.1) （◊ の分解式）

$$\frac{\{\vec{t}\,\breve{o}\,\vec{l}\,g\},\ \alpha \to \beta\ ,\{\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,f\}}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} \vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,f^{\Diamond} \in \alpha & \vec{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in A_\varepsilon^n,\ \vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in K^n \\ \vec{t}\,\breve{o}\,\vec{l}\,g^{\Diamond} \in \beta & \vec{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in A_\varepsilon^m,\ \vec{l} = (l_1, \ldots, l_m) \in K^m \end{cases}$

注意 4
上式に出てくる $\{\cdots\}$ というのは，**ただし書きの条件を充たすような元全てについて，**$\{\cdots\}$ **の中に書かれているような元を上式に付け加える**という操作を意味している．この記法を今後は断りなく使うことにする．今は $\emptyset$ 型の元だけの式を扱うという約束から，以下では特別な場合を除き $P_f = \{k_i\}_{i=1}^n$ 等は明示しないことにする．

例
$\alpha = f^\Diamond,\ \beta = t\,\breve{o}k\,g^\Diamond$ としたとき，分解式は，

$$\frac{t\,\breve{o}k\,g,\ f^\Diamond \to t\,\breve{o}k\,g^\Diamond,\ f}{f^\Diamond \to t\,\breve{o}k\,g^\Diamond}$$

となる．

(DR.2) （$\wedge$ の分解式）

$$\frac{\{\,\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,f_1)\,,\vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,f_2)\,\},\ \alpha \to \beta\,,(\quad \vec{t^0}\,\breve{o}\vec{l^0}\,(\vec{t^1}\,\breve{o}\vec{l^1}\,g_1)\,,\vec{t^0}\,\breve{o}\vec{l^0}\,(\vec{t^2}\,\breve{o}\vec{l^2}\,g_2)\quad)}{\alpha \to \beta}$$

$$\text{ただし，}\begin{cases} \vec{s^0}\,\breve{o}\vec{k^0}\,(\vec{s^1}\,\breve{o}\vec{k^1}\,(\vec{s^2}\,\breve{o}\vec{k^2}\,(f_1 \wedge f_2))) \in \alpha \\ \qquad \vec{s^j} = (s^j_1, \ldots, s^j_{n^j}) \in A_\varepsilon^{n^j},\ \vec{k^j} = (k^j_1, \ldots, k^j_{n^j}) \in K^{n^j} \quad (j = 0, 1, 2) \\ \qquad P_{f_1} = \{k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^1_1, \ldots, k^1_{n^1}\},\ P_{f_2} = \{k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^2_1, \ldots, k^2_{n^2}\} \\ \vec{t^0}\,\breve{o}\vec{l^0}\,(\vec{t^1}\,\breve{o}\vec{l^1}\,(\vec{t^2}\,\breve{o}\vec{l^2}\,(g_1 \wedge g_2))) \in \beta \\ \qquad \vec{t^j} = (t^j_1, \ldots, t^j_{m^j}) \in A_\varepsilon^{m^j},\ \vec{l^j} = (l^j_1, \ldots, l^j_{m^j}) \in K^{m^j} \quad (j = 0, 1, 2) \\ \qquad P_{g_1} = \{l^0_1, \ldots, l^0_{m^0}, l^1_1, \ldots, l^1_{m^1}\},\ P_{g_2} = \{l^0_1, \ldots, l^0_{m^0}, l^2_1, \ldots, l^2_{m^2}\} \end{cases}$$

注意 5
上式の右辺に出てくる $(\cdots)$ というのは，**ただし書きの条件を充たすような元全てについて，** $(\cdots)$ **の中に書かれているような元のうち** <u>**どちらか一方のみ**</u> **を上式に付け加える**という操作を意味している．そして，そのあらゆる付け加え方に対する式を全部上式とするということである．(したがって，一般に上式は複数個になる．) この場合，もし $\vec{t^0}\,\breve{o}\vec{l^0}\,(\vec{t^1}\,\breve{o}\vec{l^1}\,(\vec{t^2}\,\breve{o}\vec{l^2}\,(g_1 \wedge g_2)))$ という形の元が β に n 個入っていたとすると，その分解式は 2^n 個の上式を持つことになるわけである．この記法も今後は断りなく使うことにする．

例
$\alpha = f_1 \wedge f_2,\ \beta = g_1 \wedge g_2$ としたとき，分解式は，

$$\frac{f_1,\ f_2,\ f_1 \wedge f_2 \to g_1 \wedge g_2,\ g_1 \qquad f_1,\ f_2,\ f_1 \wedge f_2 \to g_1 \wedge g_2,\ g_2}{f_1 \wedge f_2 \to g_1 \wedge g_2}$$

となる．

(DR.3) ($\vee$ の分解式)

$$\frac{\{\,\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(f_1^\Diamond \wedge f_2^\Diamond)^\Diamond\,\},\ \alpha \to \beta\,,\{\,\vec{t}\,\breve{o}\vec{l}\,(g_1^\Diamond \wedge g_2^\Diamond)^\Diamond\,\}}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} \vec{s}\breve{o}\vec{k}\,(f_1 \vee f_2) \in \alpha & \vec{s} = (s_1, \dots, s_n) \in A_\varepsilon^n,\ \vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in K^n \\ \vec{t}\breve{o}\vec{l}\,(g_1 \vee g_2) \in \beta & \vec{t} = (t_1, \dots, t_m) \in A_\varepsilon^m,\ \vec{l} = (l_1, \dots, l_m) \in K^m \end{cases}$

(DR.4) ($\Rightarrow$ の分解式)

$$\frac{\{\vec{s}\breve{o}\vec{k}\,(f_1^{\Diamond} \vee f_2)\},\ \alpha \to \beta\,,\{\vec{t}\breve{o}\vec{l}\,(g_1^{\Diamond} \vee g_2)\}}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} \vec{s}\breve{o}\vec{k}\,(f_1 \Rightarrow f_2) \in \alpha & \vec{s} = (s_1, \dots, s_n) \in A_\varepsilon^n,\ \vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in K^n \\ \vec{t}\breve{o}\vec{l}\,(g_1 \Rightarrow g_2) \in \beta & \vec{t} = (t_1, \dots, t_m) \in A_\varepsilon^m,\ \vec{l} = (l_1, \dots, l_m) \in K^m \end{cases}$

(DR.5) ($\square$ の分解式)

$$\frac{\{\,t\,\breve{o}\pi\, b\triangle\},\ \alpha \to \beta\,,\{\,s\,\breve{o}\pi\, a\triangle\}}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} s\,\breve{o}\pi\, a^{\square}\triangle \in \alpha \\ t\,\breve{o}\pi\, b^{\square}\triangle \in \beta \end{cases}$

(DR.6) ($\sqcap$ の分解式)

$$\frac{\{\,s\,\breve{o}\pi\, a_1\triangle\,,s\,\breve{o}\pi\, a_2\triangle\},\ \alpha \to \beta\,,(\,t\,\breve{o}\pi\, b_1\triangle\,,t\,\breve{o}\pi\, b_2\triangle\,)}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcap a_2)\triangle \in \alpha \\ t\,\breve{o}\pi\,(b_1 \sqcap b_2)\triangle \in \beta \end{cases}$

注意 6

ここで，上式右辺の $(\cdots)$ は，$\wedge$ の分解式に現れたものと同じ意味である．

(DR.7) ($\sqcup$ の分解式)

$$\frac{\{\,s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}\triangle\},\ \alpha \to \beta\,,\{\,t\,\breve{o}\pi\,(b_1^{\square} \sqcap b_2^{\square})^{\square}\triangle\}}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcup a_2)\triangle \in \alpha \\ t\,\breve{o}\pi\,(b_1 \sqcup b_2)\triangle \in \beta \end{cases}$

(DR.8) (Ωx の分解式)

$$\frac{\{\,f(x/s)\},\ \alpha \to \beta\,,\{\,g(x/t)\}}{\alpha \to \beta}$$

ただし，$\begin{cases} s\,\breve{o}\pi\,(f\,\Omega x) \in \alpha \\ t\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x) \in \beta \end{cases}$

(DR.9) ($|\,a\,| > p$ の分解式 (n))

$$\frac{\{x\,\breve{o}\pi\,a\triangle\},\ \alpha \to \beta\,,\{x\,\breve{o}\pi\,b_1\triangle,\dots,x\,\breve{o}\pi\,b_m\triangle\},\{s_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle\,,\dots,s_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle\}}{\alpha \to \beta}$$

$$\text{ただし，}\begin{cases} |\,a\,| > p \in \alpha \\ |\,b_j\,| > q_j \in \beta \qquad (j = 1,\dots,m) \\ \quad p \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{m} q_j \\ |\,b\,| > 0 \in \beta \end{cases}$$

注意 7

ここで，上式に加える元の中に変数 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が使われているが，もともと $\alpha \cup \beta$ に自由に現れる ε 型の変数は有限個しかないので，$\alpha \cup \beta$ に自由に現れない ε 型の変数は可算無限個ある．また，$|\,a\,| > p \in \alpha$ と $|\,b_j\,| > q_j \in \beta$ の組み合わせで，

$$p \geq \sum_{j=1}^{m} q_j$$

を充たすものは有限個しかない．したがって，各組ごとに 1 つずつ $\alpha \cup \beta$ に自由に現れない変数 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ を選び，さらにそれらが全て異なるようにできる．この変数 x を用いて，各組ごとに $x\,\breve{o}\pi\,a\triangle$，$x\,\breve{o}\pi\,b_j\triangle$ という元を作り，それぞれ上式の左辺と右辺に付け加えるのである．s_i $(i = 1,\dots,n)$ については，もともと A_ε は可算なので，

$$A_\varepsilon = \{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots\}$$

と並べてあるものとして，先頭から n 個を取ってきたものである．
そして，$|\,b\,| > 0 \in \beta$ なる各 b に対して，それぞれ，

$$s_1\,\breve{o}\pi\,b\triangle, \dots, s_n\,\breve{o}\pi\,b\triangle$$

を作り，全て上式の右辺に付け加えるのである．$|\,a\,| > p$ の分解式は $n \in \mathbb{N}$ によってパラメータ付けられているので,「$|\,a\,| > p$ の分解式 (n)」と書く．

(DR.10) ($\overline{p}k$ の分解式)

$$\frac{\{\,|\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,f))\,\Omega x\,| > p\,\},\ \alpha \to \beta\,,\{\,|\,b \sqcap (\vec{t}\,\breve{o}\vec{l}\,(x\,\breve{o}l\,g))\,\Omega x\,| > q\,\}}{\alpha \to \beta}$$

$$\text{ただし，}\begin{cases} \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,f) \in \alpha & \vec{s} = (s_1,\dots,s_n) \in A_\varepsilon^n,\ \vec{k} = (k_1,\dots,k_n) \in K^n \\ \vec{t}\,\breve{o}\vec{l}\,(b\,\overline{p}l\,g) \in \beta & \vec{t} = (t_1,\dots,t_m) \in A_\varepsilon^m,\ \vec{l} = (l_1,\dots,l_m) \in K^m \end{cases}$$

注意 8

ここで，上式に加える元の中に変数 $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が使われているが，もともと $\alpha \cup \beta$ に自由に現れる ε 型の変数は有限個しかないので，$\alpha \cup \beta$ に自由に現れない ε 型の変数は可算無限個ある．したがって，α，β の中にある $a\,\overline{p}k\,f$ の形をした元が，それぞれ

$$a_1\overline{p_1}k_1\, f_1\,, \ldots\,,\ a_n\overline{p_n}k_n\, f_n$$
$$b_1\overline{q_1}l_1\, g_1\,, \ldots\,,\ b_m\overline{q_m}l_m\, g_m$$

であるとするならば，$\alpha\cup\beta$ に自由に現れない変数 $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m\in \mathrm{Var}_\varepsilon$ (全て異なる) を取ってくることができるので，それらを用いて

$$|\, a_i \sqcap (x_i\, \breve{o}k_i\, f_i)\, \Omega x_i\,| > p_i \qquad (1\le i\le n)$$
$$|\, b_j \sqcap (y_j\, \breve{o}l_j\, g_j)\, \Omega y_j\,| > q_j \qquad (1\le j\le n)$$

という元を作り，それぞれ上式の左辺と右辺に付け加えるのである．

(DR.11) ($\underline{p}k$ の分解式)

$$\frac{\{\,\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\, f^{\Diamond})^{\Diamond}\,\},\ \alpha\to\beta\,,\{\,\vec{t}\,\breve{o}\vec{l}\,(b\,\overline{p}l\, g^{\Diamond})^{\Diamond}\,\}}{\alpha\to\beta}$$

$$\text{ただし，}\begin{cases}\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}(a\,\underline{p}k\, f)\in\alpha & \vec{s}=(s_1,\ldots,s_n)\in A_\varepsilon^n,\ \vec{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in K^n\\ \vec{t}\,\breve{o}\vec{l}(b\,\underline{p}l\, g)\in\beta & \vec{t}=(t_1,\ldots,t_m)\in A_\varepsilon^m,\ \vec{l}=(l_1,\ldots,l_m)\in K^m\end{cases}$$

(DR.12) ($\breve{o}k$ の分解式)

$$\frac{\{\,s^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}k^{\vec{\sigma}}\, f\,|\,\sigma\in S_n\,\},\ \alpha\to\beta\,,\{\,t^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}l^{\vec{\sigma}}\, g\,|\,\sigma\in S_n\,\}}{\alpha\to\beta}$$

$$\text{ただし，}\begin{cases}\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, f\in\alpha & \vec{s}=(s_1,\ldots,s_n)\in A_\varepsilon^n,\ \vec{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in K^n\\ \vec{t}\,\breve{o}\vec{l}\, g\in\beta & \vec{t}=(t_1,\ldots,t_m)\in A_\varepsilon^m,\ \vec{l}=(l_1,\ldots,l_m)\in K^m\end{cases}$$

注意 9
S_n は n 次対称群とし，$\forall\,\sigma\in S_n$ について，$s^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}k^{\vec{\sigma}}\, f$ と $t^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}l^{\vec{\sigma}}\, g$ をそれぞれ上式の左辺と右辺に付け加えるのである．

以上で，各算法記号に対する分解式は全て定義された．分解式の重要な性質を補題として挙げておく．

補題 3.1
分解式 (DR.1)〜(DR.12) のそれぞれについて，上式が全て MCL′ で証明可能ならば下式も MCL′ で証明可能である．

証明
推論規則 (IR.1)〜(IR.14) を用いて，上式から下式が導けることを示せばよい．各分解式はそうなるように定義されているので，確認するのは容易である．
例えば $\Diamond$ の分解式ならば，上式に推論規則 (IR.3) を何回か用いてから推論規則 (IR.1) を使うことで，下式が導ける． □

3.2　分解の実行

「$\emptyset$ 型の元のみからなる恒真式は全て MCL′ で証明可能」ということを示すかわりに，その対偶である「$\emptyset$ 型の元のみからなる MCL′ で証明不可能な式は恒真式でない」を示す．そのため，$\emptyset$ 型の元のみからなる MCL′ で証明不可能な任意の式を出発点として分解を実行する．

定義 3.1
MCL′ で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ を次のように帰納的に定義する．

(i) $n = 0$ のとき
$\emptyset$ 型の元のみからなる MCL′ で証明不可能な任意の式をとり，$\alpha_0 \to \beta_0$ とする．

(ii) $n > 0$ のとき
分解式 γ を n に応じて次のように決める．

$$\gamma := \begin{cases} \Diamond \text{の分解式} & n \equiv 0 \pmod{12} \\ \wedge \text{の分解式} & n \equiv 1 \pmod{12} \\ \vee \text{の分解式} & n \equiv 2 \pmod{12} \\ \Rightarrow \text{の分解式} & n \equiv 3 \pmod{12} \\ \Box \text{の分解式} & n \equiv 4 \pmod{12} \\ \sqcap \text{の分解式} & n \equiv 5 \pmod{12} \\ \sqcup \text{の分解式} & n \equiv 6 \pmod{12} \\ \Omega x \text{の分解式} & n \equiv 7 \pmod{12} \\ |a| > p \text{の分解式}(n) & n \equiv 8 \pmod{12} \\ \overline{p}k \text{の分解式} & n \equiv 9 \pmod{12} \\ \underline{p}k \text{の分解式} & n \equiv 10 \pmod{12} \\ \breve{o}k \text{の分解式} & n \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

このもとで，$\alpha_n \to \beta_n$ を下式とする分解式 γ を作る．補題 3.1 によれば，分解式の上式が MCL′ で証明可能であれば下式も MCL′ で証明可能である．したがって，帰納的定義の仮定から $\alpha_n \to \beta_n$ が MCL′ で証明不可能なので，分解式 γ の上式のうちの少なくとも 1 つは MCL′ で証明不可能でなくてはならない．その式を，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ と定義する．(厳密には選択公理が必要.)

以上で MCL′ で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ が定義できたので，これを用いて，

$$\alpha^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n\,, \quad \beta^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

と定義する．ただし，$\bigcup_{n=0}^{\infty}$ は α_n，β_n をそれぞれ集合とみなしたときの和集合である．

注意 10
分解式の定義より α_n , β_n はそれぞれ単調に増加するので，$\begin{cases} \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq \cdots \alpha^* \\ \beta_0 \subseteq \beta_1 \subseteq \cdots \beta^* \end{cases}$ が成り立つ．

命題 3.1
α^* と β^* には共通元はない．

証明
もし，$\exists f \in A_{\emptyset}, f \in \alpha^*$ かつ $f \in \beta^*$ とすると，$\exists n \in \mathbb{N}\ f \in \alpha_n$ かつ $\exists m \in \mathbb{N}\ f \in \beta_m$ となるが，注意 10 を思い出せば，$n \leq l$，$m \leq l$ なる $l \in \mathbb{N}$ に対して $f \in \alpha_l$，$f \in \beta_l$ となるので，$\alpha_l \to \beta_l$ は MCL′ で証明可能となり α^* と β^* の定義に矛盾する．したがって，α^* と β^* には共通元はない．□

3.3 狭義単相格世界と付値

ここまでで，MCL′ で証明不可能な式 $\alpha_0 \to \beta_0$ から α^* と β^* が定義できた．ここからは，α^* と β^* を用いて $\alpha_0 \to \beta_0$ を偽とするような狭義単相格世界 W と定付値 Φ 変付値 ν を構成する作業に取りかかる．

狭義単相格世界 W を定義するためには，基底 S，基本関係 ∃，そして測度 $|\cdot|$ を決めなくてはならない．S，∃，$|\cdot|$ を，それぞれ次のように定めることにする．

(1) 基底 S

$$S := \mathrm{Prm}_{\varepsilon}$$

(2) 基本関係 ∃
$\forall a, b \in S$ に対して，

$$b \ni a \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} a\breve{o}\pi b\triangle \in \alpha^* \text{ または } a = b$$

(3) 測度 $|\cdot|$
測度の定義のためにいくつかの準備が必要である．量系 $\mathbb{P}$ についての補題 3.4 を示すために整列集合に関する補題を 2 つほど先に示す．

補題 3.2
$\mathbb{P}$ を量系，$Q \subseteq \mathbb{P}$ を整列集合，$p \in \mathbb{P}$ としたとき，

$$Q' = \{q + p \mid q \in Q\}$$

は整列集合である．

証明
もし $Q = \emptyset$ ならば，$Q' = \{p\}$ となるので Q' は整列集合．したがって，以下 $Q \neq \emptyset$ とする．$f \in Q \to Q'$ を，$f(q) := q + p$ で定義すると，f は全射である．$\forall S \subseteq Q'$，$S \neq \emptyset$ なる S をとると，f は全射なので $f^{-1}(S) \neq \emptyset$．$f^{-1}(S) \subseteq Q$ で，Q は整列集合だから，$q_0 := \min f^{-1}(S)$ が存在する．このとき，$q_0 + p = \min S$ である．というのは，$\forall q + p \in S$ に対して $q \in f^{-1}(S)$ より，$q_0 \leq q$．量系の性質より，$q_0 + p \leq q + p$ となるからである．これにより，$q_0 + p = \min S$ であることが示されたので，Q' は整列集合である．□

補題 3.3
$\mathbb{P}$ を量系，$Q_1, \ldots, Q_n \subseteq \mathbb{P}$ を整列集合としたとき，

$$Q' = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$$

は整列集合である．

証明

$\forall S \subseteq Q', S \neq \emptyset$ なる S をとり，$S_i := S \cap Q_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ とする．$S_i \neq \emptyset$ ならば，Q_i の整列性より $\min S_i$ が存在する．また，少なくとも 1 つの i に対しては $S_i \neq \emptyset$ なので，

$$q_0 := \min\{\min S_i \mid S_i \neq \emptyset, i = 1, \ldots, n\}$$

とおくと，このような q_0 は必ず存在する．このとき，$q_0 = \min S$ となっている．というのは，$\forall q \in S$ をとると，$S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ より，$q \in S_i$ となる i が存在する．$S_i \neq \emptyset$ より $\min S_i$ が存在し，$\min S_i \leq q$．q_0 の定義より $q_0 \leq \min S_i$ だから，結局，$q_0 \leq q$．したがって，Q' は整列集合である． □

補題 3.4
量系 $\mathbb{P}$ の有限生成な台部分代数系は整列集合である．

証明

生成元の個数 N に関する帰納法で示す．

(i) $N = 1$ のとき
生成元を $p_1 \in \mathbb{P}$ とすると，p_1 で生成される台部分代数系 $[p_1]$ は，

$$[p_1] = \{np_1 \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad (\text{ただし，以下 } 0 \in \mathbb{N} \text{ とする．})$$

とかける．
ここで，$f \in \mathbb{N} \to [p_1]$ を

$$f(n) := np_1$$

で定義すると，f は全射である．
$\forall S \subseteq [p_1], S \neq \emptyset$ なる S をとると，f は全射なので $f^{-1}(S) \neq \emptyset$．したがって，$\mathbb{N}$ の整列性より，$\min f^{-1}(S) = n_0$ が存在する．このとき，$n_0 p_1 = \min S$ となっている．というのは，$\forall np_1 \in S$ に対して，$n \in f^{-1}(S)$ より $n_0 \leq n$．したがって，$n_0 p_1 \leq np_1$．ゆえに $N = 1$ のときは補題が成り立つ．

(ii) $N > 1$ のとき
生成元を $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{P}$ とする．$p_j < p_N$ $(j = 1, \ldots, N-1)$ として一般性を失わない．
$p_1, \ldots, p_N$ で生成される台部分代数系 $[p_1, \ldots, p_N]$ は，

$$\begin{aligned}[p_1, \ldots, p_N] &= \{\textstyle\sum_{j=1}^{N} n_j p_j \mid n_j \in \mathbb{N}\} \\ &= \{p + np_N \mid p \in [p_1, \ldots, p_{N-1}], n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

とかける．
したがって，$\forall q \in [p_1, \ldots, p_N]$ について，$\exists n_j \in \mathbb{N} \quad (j = 1, \ldots, N)$ が存在して，

$$q = \sum_{j=1}^{N} n_j p_j \;\leq\; \Big(\sum_{j=1}^{N} n_j\Big) p_N$$

となるので，$q \leq Mp_N$ となるある $M \in \mathbb{N}$ が取れることに注意しておく．
$\forall S \subseteq [p_1, \ldots, p_n], S \neq \emptyset$ なる S をとる．$S \neq \emptyset$ より，$\exists \tilde{p} \in S$ がとれる．上に述べた注意より，$\exists M \in \mathbb{N}$ がとれて $\tilde{p} \leq Mp_N$ とできる．
ここで，$[p_1, \ldots, p_N]$ の元 q を

$$q = p + np_N \qquad (p \in [p_1, \ldots, p_{N-1}], n \in \mathbb{N})$$

とかくことにすると，

$$q \leq \tilde{p} \Longrightarrow n \leq M$$

が成り立つ．

なぜなら，もし $M < n$ とすると，

$$\tilde{p} \leq Mp_N < np_N \leq p + np_N = q$$

となるからである．

このことから，$S' = \{p \in S \mid p \leq \tilde{p}\}$ としたときに，

$$S' \subseteq \bigcup_{n=0}^{M} \{p + np_N \mid p \in [p_1, \ldots, p_{N-1}]\}$$

が成り立つことがわかる．

帰納法の仮定から $[p_1, \ldots, p_{N-1}]$ は整列集合なので，補題 3.2 より，

$$\{p + np_N \mid p \in [p_1, \ldots, p_{N-1}]\} \qquad (n = 0, \ldots, M)$$

は整列集合である．したがって，補題 3.3 より，

$$\bigcup_{n=0}^{M} \{p + np_N \mid p \in [p_1, \ldots, p_{N-1}]\}$$

も整列集合である．

$\tilde{p} \in S$ より $S' \neq \emptyset$ なので，$\min S' = p_0$ が存在する．明らかに $\min S' = \min S$ であるので，$p_0 = \min S$ である．したがって，$[p_1, \ldots, p_N]$ は整列集合である．

□

定義 3.2

(i) $f \in A_\emptyset$ **に** $p \in \mathbb{P}$ **が現れる**とは，$\exists k \in K$ があって，$\overline{p}k$ または $\underline{p}k$ が f に算法記号として現れることをいう．

(ii) $\alpha \in A_\emptyset^*$ **に** $p \in \mathbb{P}$ **が現れる**とは，$\exists f \in A_\emptyset$ があって，$f \in \alpha$ かつ f に p が現れることをいう．

補題 3.5

$\alpha^* \cup \beta^*$ に現れる $p \in \mathbb{P}$ は有限個である．
(ただし，同じ p が複数回現れても１個と数えるものとする．すなわち，

$$\sharp\{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ は} \alpha^* \cup \beta^* \text{に現れる}\} < \infty$$

という意味である．)

証明

$\alpha_0 \cup \beta_0$ に含まれる $f \in A_\emptyset$ は有限個であり，A が普遍型付き代数系なので f の階数は一意に定まり，もちろんそれも有限．ゆえに f に現れる p は有限個．したがって，$\alpha_0 \cup \beta_0$ に現れる p は有限個である．また，各分解式を調べてみれば，上式に下式に現れないような p が導入される操作はないことがわかる．したがって，上式に現れるような p は必ず下式に現れていなくてはならない．このことから，$\alpha^* \cup \beta^*$ に現れるような $p \in \mathbb{P}$ は全て $\alpha_0 \cup \beta_0$ に現れているものに限られる．ゆえに，$\sharp\{p \in \mathbb{P} \mid p \text{ は} \alpha^* \cup \beta^* \text{に現れる}\} < \infty$ □

定義 3.3

- $Q_0 := \{p \in \mathbb{P} \mid p$ は$\alpha^* \cup \beta^*$に現れる$\}$
- $Q_1 := \{p \in \mathbb{P} \mid p > \max Q_0\}$とし，$p^* \in \mathbb{P}$を次のように決める．ただし，$Q_0 = \emptyset$のときは$\max Q_0 := 0$としておく．
  (a) $Q_1 \neq \emptyset$ならば，何かしらQ_1の元があるので，その任意の１つを固定してp^*とする．
  (b) $Q_1 = \emptyset$ならば，$Q_0 \neq \emptyset$である.（もし$Q_1 = Q_0 = \emptyset$であれば，$\max Q_0 = 0$より$\mathbb{P} = \{0\}$となって限量系の定義に矛盾する.）したがって，$\max Q_0$が$\mathbb{P}$の最大元であることがわかる．そこで，この場合は$p^* := \infty$とする．

以上の準備のもとで，測度$|\cdot|$を定義する．

定義 3.4
$X \in \mathcal{P}S$に対し，

$$|X| := \min\{p^*, \textstyle\sum_{j=1}^m q_j \mid X \subseteq \bigcup_{j=1}^m Fb_j, |b_j| > q_j \in \beta^*\}$$

と定義する．ただし，$F : A_\varepsilon \cup A_\delta \to \mathcal{P}S$を，

$$Fa := \{ s \in S \mid s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \notin \beta^* \} \qquad (\forall a \in A_\varepsilon \cup A_\delta)$$

とする．また，$m = 0$の場合を，

$$\bigcup_{j=1}^{0} Fb_j := \emptyset, \quad \sum_{j=1}^{0} q_j := 0$$

と定義しておく．

注意 11
右辺の最小値が存在することは，

$$Q_X := \{p^*, \textstyle\sum_{j=1}^m q_j \mid X \subseteq \bigcup_{j=1}^m Fb_j, |b_j| > q_j \in \beta^*\}$$

とおくと，

$$Q_X \subseteq [Q_0 \cup \{p^*\}] \qquad (Q_0 \cup \{p^*\}\text{で生成された}\ \mathbb{P}\ \text{の台部分代数系})$$

であるが，補題 3.5 よりQ_0は有限集合なので，補題 3.4 より$[Q_0 \cup \{p^*\}]$は整列集合である．$p^* \in Q_X$より$Q_X \neq \emptyset$なので，$\min Q_X$が必ず存在することがわかる．

命題 3.2
上で定義した$|\cdot| \in \mathcal{P}S \to \mathbb{P}$は測度の３条件を充たす．

証明
(i) $X = \emptyset \iff |X| = 0$

(a) $X = \emptyset \implies |X| = 0$

$\forall |b_j| > q_j \in \beta^*$ について，

$$X = \emptyset = \bigcup_{j=1}^{0} Fb_j$$

なので，

$$|X| \leq \sum_{j=1}^{0} q_j = 0$$

である．すなわち，$|X| = 0$.

(b) $|X| = 0 \implies X = \emptyset$

$|X| = 0$，$X \neq \emptyset$ とする．p^* は定義から $p^* > 0$ なので，$|X|$ の定義から
ある $b_1, \ldots, b_m \in A_\varepsilon \cup A_\delta$ が存在して，

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Fb_j,\ |b_j| > q_j \in \beta^*,\ \sum_{j=1}^{m} q_j = 0$$

を充たしている．すなわち，この $b_1, \ldots, b_m$ が最小値を実現しているものとする．
$\sum_{j=1}^{m} q_j = 0$ より，$q_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$ である．これは $q_j \geq 0$ より明らかである．
したがって，$|b_j| > 0 \in \beta^* \quad (j = 1, \ldots, m)$.
分解式を考えると，$\forall s \in S$ について，$s\, \breve{o}\pi\, b_j \triangle \in \beta^*$ となっていなくてはならない．
ここで，$Fb_j = \{ s \in S \mid s\, \breve{o}\pi\, b_j \triangle \notin \beta^* \}$ であることから，$s \notin Fb_j$.
したがって，$Fb_j = \emptyset \quad (j = 1, \ldots, m)$ である．
これより，$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \emptyset = \emptyset$．すなわち，$X = \emptyset$.

(ii) $X \subseteq Y \implies |X| \leq |Y|$

$X \subseteq Y$ とする．もし $|Y| = p^*$ ならば，$|X| \leq p^*$ は必ず成り立つので，$|X| \leq |Y|$ である．
$|Y| < p^*$ とすると，

$$\exists\, b_1, \ldots, b_m \in A_\varepsilon \cup A_\delta \quad \text{s.t.} \quad b \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Fb_j,\ |b_j| > q_j \in \beta^*,\ |Y| = \sum_{j=1}^{m} q_j$$

とできる．$X \subseteq Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Fb_j$ より，$|X|$ の定義から

$$|X| \leq \sum_{j=1}^{m} q_j = |Y|$$

したがって，$X \subseteq Y \implies |X| \leq |Y|$.

(iii) $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$

$|X| = p^*$ とすると，$|X \cup Y| \leq p^*$ は必ず成り立つので，

$$|X \cup Y| \leq p^* = |X| \leq |X| + |Y|$$

である．Y についても対称なので，以下 $|X| < p^*$ かつ $|Y| < p^*$ の場合を考える．
ある $c_1, \dots, c_n \in A_\varepsilon \cup A_\delta$ と，ある $d_1, \dots, d_m \in A_\varepsilon \cup A_\delta$ が存在して，

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Fc_i,\ |c_i| > p_i \in \beta^*,\ |X| = \sum_{i=1}^{n} p_i$$
$$Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Fd_j,\ |d_j| > q_j \in \beta^*,\ |Y| = \sum_{j=1}^{m} q_j$$

とできる．このとき，

$$X \cup Y \subseteq \Big(\bigcup_{i=1}^{n} Fc_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{m} Fd_j\Big)$$

なので，$|X \cup Y|$ の定義より，

$$|X \cup Y| \leq \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{m} q_j = |X| + |Y|.$$

□

これで測度 $|\cdot|$ も定義されたので，狭義単相格世界 W を構成することができた．続いて，Prm から W への定付値と変付値を定義する．

(4) 定付値 Φ

(i) $a \in \mathrm{Con}_\varepsilon$ のとき，$\Phi a := a$

(ii) $a \in \mathrm{Con}_\delta$ のとき，$(\Phi a)s = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \in \alpha^* \quad (\forall s \in S)$

(iii) $f \in \mathrm{Con}_P : P = \{k_1, \dots, k_n\} \subseteq K$ のとき，
$(\Phi f)\theta = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} \theta k_1\, \breve{o} k_1 (\cdots (\theta k_n\, \breve{o} k_n\, f) \cdots) \in \alpha^* \quad (\forall \theta \in (P \to S))$

(5) 変付値 ν

(i) $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ のとき，$\nu x := x$

(ii) $x \in \mathrm{Var}_\delta$ のとき，$(\nu x)s = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} s\,\breve{o}\pi\, x\triangle \in \alpha^* \quad (\forall s \in S)$

(iii) $f \in \mathrm{Var}_P : P = \{k_1, \dots, k_n\} \subseteq K$ のとき，
$(\nu f)\theta = 1 \overset{\mathrm{def}}{\iff} \theta k_1\, \breve{o} k_1 (\cdots (\theta k_n\, \breve{o} k_n\, f) \cdots) \in \alpha^* \quad (\forall \theta \in (P \to S))$

注意 12
命題 3.1 より，この定付値，変付値の定義には矛盾がない．

以上で狭義単相格世界 W と定付値 Φ，変付値 ν が構成された．したがって，狭義単相格言語 A から W^{Val} への意味写像 Φ^* が定義される．ここで，Φ^* について成り立つ性質を 1 つ示しておく．

命題 3.3
$\forall s \in S (= \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ **について，**$(\Phi^* s)\nu = s$ **である．**

証明
$\mathrm{Prm}_\varepsilon = \mathrm{Con}_\varepsilon \coprod \mathrm{Var}_\varepsilon$（直和）なので，２つの場合を調べればよい．

$$s \in \mathrm{Con}_\varepsilon \text{のとき，} \quad (\Phi^* s)\nu = \Phi s = s.$$
$$s \in \mathrm{Var}_\varepsilon \text{のとき，} \quad (\Phi^* s)\nu = \nu s = s.$$

したがって，どちらの場合も $(\Phi^* s)\nu = s$ である． □

3.4 MCL′ の完全性

ここでは，前節までで構成した狭義単相格世界において，式 $\alpha_0 \to \beta_0$ が偽になることを示す．まず，証明のための概念を１つ用意する．

定義 3.5
任意の A の元に対して，**複雑度** $C : A \to \mathbb{N}$ を次のように帰納的に定義する．

- $C(a) := 0 \quad (a \in \mathrm{Prm})$
- $C(a\triangle) := C(a)$
- $C(s\,\breve{o}k\,f) := C(f)$
- $C(f^\Diamond) := C(f) + 1$
- $C(f \wedge g) := C(f) + C(g) + 1$
- $C(f \vee g) := C(f) + C(g) + 5$
- $C(f \Rightarrow g) := C(f) + C(g) + 7$
- $C(a^\Box) := C(a) + 1$
- $C(a \sqcap b) := C(a) + C(b) + 1$
- $C(a \sqcup b) := C(a) + C(b) + 5$
- $C(f\,\Omega x) := C(f) + 1$
- $C(a\,\overline{p}k\,f) := C(a) + C(f) + 4$
  ただし，$a = \mathrm{one}$，$k = \pi$，$f = b\triangle$ のときのみ，
  $C(\mathrm{one}\,\overline{p}\pi\,b\triangle) := C(b) + 1$
  とする．
- $C(a\,\underline{p}k\,f) := C(a) + C(f) + 7$

複雑度について次の補題が成り立つ．

補題 3.6
$\forall x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$，$\forall s \in A_\varepsilon$，$\forall a \in A$ について，

$$C(a(x/s)) = C(a)$$

が成り立つ.

証明

代入の定義に基いて，帰納法で示す.

(i) $a \in \mathrm{Prm}$ のとき

代入の定義より，$a(x/s) := \begin{cases} s & (a = x) \\ a & (a \neq x) \end{cases}$ である.

- $a = x$ の場合　$C(a(x/s)) = C(s) = 0 = C(x) = C(a)$.
- $a \neq x$ の場合　$C(a(x/s)) = C(a)$.

したがって，$C(a(x/s)) = C(a)$.

(ii) $a \notin \mathrm{Prm}$ のとき

（以下，α は A の算法を表すものとする.）

(a) $a = \alpha(b) \quad (\alpha \neq \Omega x)$ ならば，$a(x/s) := \alpha(b(x/s))$.
帰納法の仮定から，$C(b(x/s)) = C(b)$.
複雑度の定義より，$C(\alpha(b(x/s))) = C(\alpha(b))$ なので，

$$\begin{aligned} C(a(x/s)) &= C(\alpha(b(x/s))) \\ &= C(\alpha(b)) \\ &= C(a) \end{aligned}$$

より，$C(a(x/s)) = C(a)$.

(b) $a = \alpha(b_1, b_2)$ ならば，$a(x/s) := \alpha(b_1(x/s), b_2(x/s))$.
帰納法の仮定から，$C(b_1(x/s)) = C(b_1)$，$C(b_2(x/s)) = C(b_2)$.
複雑度の定義より，$C(\alpha(b_1(x/s), b_2(x/s))) = C(\alpha(b_1, b_2))$ なので，

$$\begin{aligned} C(a(x/s)) &= C(\alpha(b_1(x/s), b_2(x/s))) \\ &= C(\alpha(b_1, b_2)) \\ &= C(a) \end{aligned}$$

より，$C(a(x/s)) = C(a)$.

(c) $a = b\,\Omega x$ ならば，$a(x/s) := a$.
したがって，$C(a(x/s)) = C(a)$.

□

以上の準備のもとで，次の補題を示す.

補題 3.7

$\forall f \in A_\emptyset$ **に対して，**

$f \in \alpha^* \implies (\Phi^* f)v = 1$

$f \in \beta^* \implies (\Phi^* f)v = 0$

証明

f の複雑度 $C(f)$ についての帰納法で証明する.

(1) $C(f) = 0$ のとき

$C(f)$ の定義から，$f \in A_\emptyset$ に対して $C(f) = 0$ となるのは，

$$f = \begin{cases} \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g & (\vec{s} \in \mathrm{Prm}_\varepsilon^n\,,\ g \in \mathrm{Prm}_P) \\ s\,\breve{o}\pi\,a\triangle & (s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon\,,\ a \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \cup \mathrm{Prm}_\delta) \end{cases}$$

の場合のみである．以下，それぞれについて詳しく調べる．

(i) $f = \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g \quad (\vec{s} \in \mathrm{Prm}_\varepsilon^n\,,\ g \in \mathrm{Prm}_P\,,\ P = \{k_1, \ldots, k_n\} \subseteq K)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\theta k_i := s_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ となる $\theta \in P \to S$ をとる．
  $g \in \mathrm{Con}_P$ であれば，定付値の定義から $(\Phi g)\theta = 1$.
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* g)\nu = \Phi g$.
  ゆえに，$((\Phi^* g)\nu)\theta = (\Phi g)\theta = 1$ である．
  $g \in \mathrm{Var}_P$ であれば，変付値の定義から $(\nu g)\theta = 1$.
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* g)\nu = \nu g$.
  ゆえに，$((\Phi^* g)\nu)\theta = (\nu g)\theta = 1$ である．
  したがって，どちらにせよ $((\Phi^* g)\nu)\theta = 1$ である．

$$\begin{aligned}
((\Phi^* g)\nu)\theta = 1 &\iff \theta k_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(\theta k_n\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* g)\nu)\cdots) = 1 \\
&\iff s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* g)\nu)\cdots) = 1 \\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* g)\nu)\cdots) = 1
\end{aligned}$$

（ここで命題 3.3 より，

$\forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon$について，$(\Phi^* s)\nu = s$

となることを用いた.）

$$\begin{aligned}
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g)\cdots)))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^* f)\nu = 1
\end{aligned}$$

  したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $\theta k_i := s_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ となる $\theta \in P \to S$ をとる．
  $g \in \mathrm{Con}_P$ であれば，$f \notin \alpha^*$ より，定付値の定義から $(\Phi g)\theta = 0$.
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* g)\nu = \Phi g$.
  ゆえに，$((\Phi^* g)\nu)\theta = (\Phi g)\theta = 0$ である．
  $g \in \mathrm{Var}_P$ であれば，$f \notin \alpha^*$ より，変付値の定義から $(\nu g)\theta = 0$.
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* g)\nu = \nu g$.
  ゆえに，$((\Phi^* g)\nu)\theta = (\nu g)\theta = 0$ である．
  したがって，どちらにせよ $((\Phi^* g)\nu)\theta = 0$ である．

$$\begin{aligned}
((\Phi^* g)\nu)\theta = 0 &\iff \theta k_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(\theta k_n\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* g)\nu)\cdots) = 0 \\
&\iff s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* g)\nu)\cdots) = 0 \\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^* g)\nu)\cdots) = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad (\text{ここで命題 3.3 より，} \\
&\qquad\quad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について，} (\Phi^* s)\nu = s \\
&\quad \text{となることを用いた．}) \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s_1 \breve{o} k_1 (\cdots (s_n \breve{o} k_n\, g)\cdots)))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\, g))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(ii) $f = s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \quad (s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon\,,\ a \in \mathrm{Prm}_\varepsilon)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  基本関係の定義から，$a \ni s$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
a \ni s &\Longleftrightarrow s\,\breve{o}\pi\, a\triangle = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\quad (\text{ここで命題 3.3 より，} \\
&\qquad\quad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について，} (\Phi^* s)\nu = s \\
&\quad \text{となることを用いた．}) \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 1
\end{aligned}
$$

  したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $f \notin \alpha^*$ であり，式　$\rightarrow\ s\,\breve{o}\pi\, s\triangle$ は MCL′ で証明可能なので $s = a$ ということもありえない．ゆえに基本関係の定義から，$a \not\ni s$ である．したがって，

$$
\begin{aligned}
a \not\ni s &\Longleftrightarrow s\,\breve{o}\pi\, a\triangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\
&\quad (\text{ここで命題 3.3 より，} \\
&\qquad\quad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について，} (\Phi^* s)\nu = s \\
&\quad \text{となることを用いた．}) \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

  したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(iii) $f = s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \quad (s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon\,,\ a \in \mathrm{Prm}_\delta)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $a \in \mathrm{Con}_\delta$ であれば，定付値の定義から $(\Phi a)s = 1$．
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* a)\nu = \Phi a$．
  ゆえに，$((\Phi^* a)\nu)s = (\Phi a)s = 1$ である．
  $a \in \mathrm{Var}_\delta$ であれば，変付値の定義から $(\nu a)s = 1$．

また，意味写像の定義から $(\Phi^* a)\nu = \nu a$.
ゆえに，$((\Phi^* a)\nu)s = (\nu a)s = 1$ である．
したがって，どちらにせよ $((\Phi^* a)\nu)s = 1$ である．

$$
\begin{aligned}
((\Phi^* a)\nu)s = 1 &\iff (\Phi^* a)\nu \ni s \\
&\iff s\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\quad (\text{ここで命題 3.3 より，} \\
&\qquad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について，} (\Phi^* s)\nu = s \\
&\quad \text{となることを用いた．}) \\
&\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a\triangle))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^* f)\nu = 1
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $a \in \mathrm{Con}_\delta$ であれば，$f \notin \alpha^*$ より，定付値の定義から $(\Phi a)s = 0$.
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* a)\nu = \Phi a$.
  ゆえに，$((\Phi^* a)\nu)s = (\Phi a)s = 0$ である．
  $a \in \mathrm{Var}_\delta$ であれば，$f \notin \alpha^*$ より，変付値の定義から $(\nu a)s = 0$.
  また，意味写像の定義から $(\Phi^* a)\nu = \nu a$.
  ゆえに，$((\Phi^* a)\nu)s = (\nu a)s = 0$ である．
  したがって，どちらにせよ $((\Phi^* a)\nu)s = 0$ である．

$$
\begin{aligned}
((\Phi^* a)\nu)s = 0 &\iff (\Phi^* a)\nu \not\ni s \\
&\iff s\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\
&\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\
&\quad (\text{ここで命題 3.3 より，} \\
&\qquad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について，} (\Phi^* s)\nu = s \\
&\quad \text{となることを用いた．}) \\
&\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a\triangle))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(2) $C(f) > 0$ のとき

(i) $f = \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g^\lozenge$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\lozenge$ の分解式より，$\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g \in \beta^*$.
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g) &= C(g) \\
&< C(g) + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C(g^{\Diamond}) \\
&= C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g^{\Diamond}) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g))\nu = 0$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g))\nu = 0 &\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g)\cdots)))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^*s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^*s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^*g)\nu)\cdots) = 0 \\
&\iff ((\Phi^*g)\nu)\theta = 0
\end{aligned}
$$

（ここで，$\theta \in (P_g \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$
\begin{aligned}
&\iff ((\Phi^*g)\nu^{\Diamond})\theta = 1 \\
&\iff (\Phi^*s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^*s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^*g)\nu^{\Diamond})\cdots) = 1 \\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g^{\Diamond})\cdots)))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g^{\Diamond}))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^*f)\nu = 1
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^*f)\nu = 1$ である.

- $f \in \beta^*$ とする.
  $\Diamond$ の分解式より，$\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g \in \alpha^*$．ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g) &= C(g) \\
&< C(g) + 1 \\
&= C(g^{\Diamond}) \\
&= C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g^{\Diamond}) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g))\nu = 1$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g))\nu = 1 &\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g)\cdots)))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^*s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^*s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^*g)\nu)\cdots) = 1 \\
&\iff ((\Phi^*g)\nu)\theta = 1
\end{aligned}
$$

（ここで，$\theta \in (P_g \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$
\begin{aligned}
&\iff ((\Phi^*g)\nu^{\Diamond})\theta = 0 \\
&\iff (\Phi^*s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^*s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,(\Phi^*g)\nu^{\Diamond})\cdots) = 0 \\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,g^{\Diamond})\cdots)))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,g^{\Diamond}))\nu = 0
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(ii) $f = \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1 \wedge g_2)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\breve{o}k$ の分解式により，n 次対称群 S_n の任意の元 σ に対して，$s^{\vec{\sigma}}\,\breve{o}k^{\vec{\sigma}}\,(g_1 \wedge g_2) \in \alpha^*$ である．
  特に，

$$P_{g_1} = \{k_1^0, \dots, k_{n^0}^0, k_1^1, \dots, k_{n^1}^1\}$$
$$P_{g_2} = \{k_1^0, \dots, k_{n^0}^0, k_1^2, \dots, k_{n^2}^2\}$$

としたとき，

$$s^{\vec{\sigma}} = (s_1^0, \dots, s_{n^0}^0, s_1^1, \dots, s_{n^1}^1, s_1^2, \dots, s_{n^2}^2)$$
$$k^{\vec{\sigma}} = (k_1^0, \dots, k_{n^0}^0, k_1^1, \dots, k_{n^1}^1, k_1^2, \dots, k_{n^2}^2)$$

なる $\sigma \in S_n$ $(n = n^0 + n^1 + n^2)$ について考えれば，

$$s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{1}}\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,(s^{\vec{2}}\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,(g_1 \wedge g_2))) \in \alpha^*$$

であることがわかる．
$\wedge$ の分解式より，

$$s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{1}}\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,g_1) \in \alpha^* \text{ かつ } s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{2}}\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,g_2) \in \alpha^*.$$

ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned} C(s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{1}}\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,g_1)) &= C(g_1) \\ &< C(g_1) + C(g_2) + 1 \\ &= C(g_1 \wedge g_2) \\ &= C(s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{1}}\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,(s^{\vec{2}}\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,(g_1 \wedge g_2)))) \\ &= C(f) \end{aligned}$$

が成り立ち，$s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{2}}\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,g_2)$ についても同様なので，帰納法の仮定から，
$(\Phi^*(s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{1}}\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,g_1)))\nu = 1$ かつ $(\Phi^*(s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{2}}\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,g_2)))\nu = 1$.

$(\Phi^*(s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{1}}\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,g_1)))\nu = 1$ かつ $(\Phi^*(s^{\vec{0}}\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,(s^{\vec{2}}\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,g_2)))\nu = 1$
$\Longleftrightarrow (\Phi^* s^{\vec{0}})\nu\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,((\Phi^* s^{\vec{1}})\nu\,\breve{o}k^{\vec{1}}\,(\Phi^* g_1)\nu) = 1$ かつ $(\Phi^* s^{\vec{0}})\nu\,\breve{o}k^{\vec{0}}\,((\Phi^* s^{\vec{2}})\nu\,\breve{o}k^{\vec{2}}\,(\Phi^* g_2)\nu) = 1$
（ここで，$(\Phi^* s^{\vec{j}})\nu := ((\Phi^* s_1^j)\nu, \dots, (\Phi^* s_{n^j}^j)\nu) \in W_\varepsilon^{n^j} \quad (j = 0, 1, 2)$ とする．）
$\Longleftrightarrow ((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{P_{g_1}}) = 1$ かつ $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 1$
（ここで，$\theta \in (P_{g_1} \cup P_{g_2} \to S)$ は，

$$\theta k_i^j = (\Phi^* s_i^j)\nu \quad (i = 1, \dots, n^j\ ;\ j = 0, 1, 2)$$

と定義されているものとする．）

$\iff (((\Phi^* g_1)\nu) \wedge ((\Phi^* g_2)\nu))\theta = 1$

$\iff (\Phi^* \vec{s})\nu \, \breve{o}\vec{k} \, ((\Phi^* g_1)\nu \wedge (\Phi^* g_2)\nu) = 1$

$\iff (\Phi^* (s^{\vec{0}} \, \breve{o}\vec{k} \, (g_1 \wedge g_2)))\nu = 1$

$\iff (\Phi^* f)\nu = 1$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $\breve{o}k$ の分解式により，n 次対称群 S_n の任意の元 σ に対して，$s^{\vec{\sigma}} \, \breve{o}k^{\vec{\sigma}} \, (g_1 \wedge g_2) \in \beta^*$ である．
  特に，

$$P_{g_1} = \{k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^1_1, \ldots, k^1_{n^1}\}$$
$$P_{g_2} = \{k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^2_1, \ldots, k^2_{n^2}\}$$

としたとき，

$$s^{\vec{\sigma}} = (s^0_1, \ldots, s^0_{n^0}, s^1_1, \ldots, s^1_{n^1}, s^2_1, \ldots, s^2_{n^2})$$
$$k^{\vec{\sigma}} = (k^0_1, \ldots, k^0_{n^0}, k^1_1, \ldots, k^1_{n^1}, k^2_1, \ldots, k^2_{n^2})$$

なる $\sigma \in S_n$ $(n = n^0 + n^1 + n^2)$ について考えれば，

$$s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{1}} \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, (s^{\vec{2}} \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, (g_1 \wedge g_2))) \in \beta^*$$

であることがわかる．
$\wedge$ の分解式より，

$$s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{1}} \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, g_1) \in \beta^* \text{ または } s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{2}} \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, g_2) \in \beta^*.$$

ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{1}} \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, g_1)) &= C(g_1) \\
&< C(g_1) + C(g_2) + 1 \\
&= C(g_1 \wedge g_2) \\
&= C(s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{1}} \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, (s^{\vec{2}} \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, (g_1 \wedge g_2)))) \\
&= C(f)
\end{aligned}$$

が成り立ち，$s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{2}} \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, g_2)$ についても同様なので，帰納法の仮定から，
$(\Phi^*(s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{1}} \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, g_1)))\nu = 0$ または $(\Phi^*(s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{2}} \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, g_2)))\nu = 0$.

$(\Phi^*(s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{1}} \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, g_1)))\nu = 0$ または $(\Phi^*(s^{\vec{0}} \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, (s^{\vec{2}} \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, g_2)))\nu = 0$

$\iff (\Phi^* s^{\vec{0}})\nu \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, ((\Phi^* s^{\vec{1}})\nu \, \breve{o}k^{\vec{1}} \, (\Phi^* g_1)\nu) = 0$ または $(\Phi^* s^{\vec{0}})\nu \, \breve{o}k^{\vec{0}} \, ((\Phi^* s^{\vec{2}})\nu \, \breve{o}k^{\vec{2}} \, (\Phi^* g_2)\nu) = 0$

（ここで，$(\Phi^* s^{\vec{j}})\nu := ((\Phi^* s^j_1)\nu, \ldots, (\Phi^* s^j_{n^j})\nu) \in W_\varepsilon^{n^j} \quad (j = 0, 1, 2)$ とする．）

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{P_{g_1}}) = 0$ または $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 0$

（ここで，$\theta \in (P_{g_1} \cup P_{g_2} \to S)$ は，

$$\theta k_i^j = (\Phi^* s_i^j)\nu \quad (i = 1, \ldots, n^j \ ; \ j = 0, 1, 2)$$

と定義されているものとする．）

$\iff (((\Phi^* g_1)\nu) \wedge ((\Phi^* g_2)\nu))\theta = 0$

$\iff (\Phi^* \vec{s})\nu \breve{o} \vec{k} \, ((\Phi^* g_1)\nu \wedge (\Phi^* g_2)\nu) = 0$

$\iff (\Phi^* (\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1 \wedge g_2)))\nu = 0$

$\iff (\Phi^* f)\nu = 0$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(iii) $f = \vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1 \vee g_2)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\vee$ の分解式より，$\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge)^\lozenge \in \alpha^*$
  ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge)^\lozenge) &= C((g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge)^\lozenge) \\
&= C(g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge) + 1 \\
&= C(g_1^\lozenge) + C(g_2^\lozenge) + 2 \\
&= C(g_1) + C(g_2) + 4 \\
&< C(g_1) + C(g_2) + 5 \\
&= C(\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1 \vee g_2)) \\
&= C(f)
\end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^* (\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge)^\lozenge))\nu = 1$．

$(\Phi^* (\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge)^\lozenge))\nu = 1$

$\iff (\Phi^* s_1)\nu \breve{o} k_1 \, (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \breve{o} k_n \, ((\Phi^* g_1)\nu^\lozenge \wedge (\Phi^* g_2)\nu^\lozenge)^\lozenge) \cdots) = 1$

$\iff (((\Phi^* g_1)\nu^\lozenge \wedge (\Phi^* g_2)\nu^\lozenge)^\lozenge)\theta = 1$

（ここで，$\theta \in (P_{g_1} \cup P_{g_2} \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする．）

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu^\lozenge \wedge (\Phi^* g_2)\nu^\lozenge)\theta = 0$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu^\lozenge)(\theta|_{P_{g_1}}) = 0$ または $((\Phi^* g_2)\nu^\lozenge)(\theta|_{P_{g_2}}) = 0$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{P_{g_1}}) = 1$ または $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 1$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu \vee (\Phi^* g_2)\nu)\theta = 1$

$\iff (\Phi^* s_1)\nu \breve{o} k_1 \, (\cdots ((\Phi^* s_n)\nu \breve{o} k_n \, ((\Phi^* g_1)\nu \vee (\Phi^* g_2)\nu)) \cdots) = 1$

$\iff (\Phi^* (\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1 \vee g_2)))\nu = 1$

$\iff (\Phi^* f)\nu = 1$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $\vee$ の分解式より，$\vec{s} \breve{o} \vec{k} \, (g_1^\lozenge \wedge g_2^\lozenge)^\lozenge \in \beta^*$

ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \wedge g_2^{\Diamond})^{\Diamond}) &= C((g_1^{\Diamond} \wedge g_2^{\Diamond})^{\Diamond}) \\
&= C(g_1^{\Diamond} \wedge g_2^{\Diamond}) + 1 \\
&= C(g_1^{\Diamond}) + C(g_2^{\Diamond}) + 2 \\
&= C(g_1) + C(g_2) + 4 \\
&< C(g_1) + C(g_2) + 5 \\
&= C(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1 \vee g_2)) \\
&= C(f)
\end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \wedge g_2^{\Diamond})^{\Diamond}))\nu = 0$.

$(\Phi^*(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \wedge g_2^{\Diamond})^{\Diamond}))\nu = 0$

$\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu\breve{o}k_1(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\breve{o}k_n((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond} \wedge (\Phi^* g_2)\nu^{\Diamond})^{\Diamond})\cdots) = 0$

$\Longleftrightarrow (((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond} \wedge (\Phi^* g_2)\nu^{\Diamond})^{\Diamond})\theta = 0$

（ここで，$\theta \in (P_{g_1} \cup P_{g_2} \to S)$ は，

$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$

と定義されているものとする.）

$\Longleftrightarrow ((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond} \wedge (\Phi^* g_2)\nu^{\Diamond})\theta = 1$

$\Longleftrightarrow ((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond})(\theta|_{P_{g_1}}) = 1$ かつ $((\Phi^* g_2)\nu^{\Diamond})(\theta|_{P_{g_2}}) = 1$

$\Longleftrightarrow ((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{P_{g_1}}) = 0$ かつ $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 0$

$\Longleftrightarrow ((\Phi^* g_1)\nu \vee (\Phi^* g_2)\nu)\theta = 0$

$\Longleftrightarrow (\Phi^* s_1)\nu\breve{o}k_1(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\breve{o}k_n((\Phi^* g_1)\nu \vee (\Phi^* g_2)\nu))\cdots) = 0$

$\Longleftrightarrow (\Phi^*(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1 \vee g_2)))\nu = 0$

$\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である.

(iv) $f = \vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1 \Rightarrow g_2)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする.
  $\Rightarrow$ の分解式より，$\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \vee g_2) \in \alpha^*$
  ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \vee g_2)) &= C((g_1^{\Diamond} \vee g_2)) \\
&= C(g_1^{\Diamond}) + C(g_2) + 5 \\
&= C(g_1) + C(g_2) + 6 \\
&< C(g_1) + C(g_2) + 7 \\
&= C(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1 \Rightarrow g_2)) \\
&= C(f)
\end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \vee g_2)))\nu = 1$.

$(\Phi^*(\vec{s}\breve{o}\vec{k}(g_1^{\Diamond} \vee g_2)))\nu = 1$

$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond}\vee(\Phi^* g_2)\nu))\cdots) = 1$

$\iff (((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond}\vee(\Phi^* g_2)\nu))\theta = 1$

（ここで，$\theta \in (P_{g_1} \cup P_{g_2} \to S)$ は，

$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$

と定義されているものとする.）

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond})(\theta|_{P_{g_1}}) = 1$ または $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 1$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{P_{g_1}}) = 0$ または $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 1$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu \Rightarrow (\Phi^* g_2)\nu)\theta = 1$

$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* g_1)\nu\Rightarrow(\Phi^* g_2)\nu))\cdots) = 1$

$\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1 \Rightarrow g_2)))\nu = 1$

$\iff (\Phi^* f)\nu = 1$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である.

- $f \in \beta^*$ とする.
  $\Rightarrow$ の分解式より，$\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1^{\Diamond} \vee g_2) \in \beta^*$
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1^{\Diamond} \vee g_2)) &= C((g_1^{\Diamond} \vee g_2)) \\
&= C(g_1^{\Diamond}) + C(g_2) + 5 \\
&= C(g_1) + C(g_2) + 6 \\
&< C(g_1) + C(g_2) + 7 \\
&= C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1 \Rightarrow g_2)) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1^{\Diamond} \vee g_2)))\nu = 0$.

$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1^{\Diamond} \vee g_2)))\nu = 0$

$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond}\vee(\Phi^* g_2)\nu))\cdots) = 0$

$\iff (((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond}\vee(\Phi^* g_2)\nu))\theta = 0$

（ここで，$\theta \in (P_{g_1} \cup P_{g_2} \to S)$ は，

$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$

と定義されているものとする.）

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu^{\Diamond})(\theta|_{P_{g_1}}) = 0$ かつ $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 0$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu)(\theta|_{P_{g_1}}) = 1$ かつ $((\Phi^* g_2)\nu)(\theta|_{P_{g_2}}) = 0$

$\iff ((\Phi^* g_1)\nu \Rightarrow (\Phi^* g_2)\nu)\theta = 0$

$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k_1\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k_n\,((\Phi^* g_1)\nu\Rightarrow(\Phi^* g_2)\nu))\cdots) = 0$

$\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(g_1 \Rightarrow g_2)))\nu = 0$

$\iff (\Phi^* f)\nu = 0$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である.

(v) $f = s\,\breve{o}\pi\, a^{\square}\triangle$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  □の分解式より，$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \in \beta^*$.
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle) &= C(a\triangle) \\
&= C(a) \\
&< C(a) + 1 \\
&= C(a^{\square}) \\
&= C(a^{\square}\triangle) \\
&= C(s\,\breve{o}\pi\, a^{\square}\triangle) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

  が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 0$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 0 &\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\iff (\Phi^* a)\nu \not\exists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (\Phi^* a)\nu^{\square} \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\iff (((\Phi^* a)\nu^{\square})\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1 \\
&\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu^{\square}\triangle = 1 \\
&\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a^{\square}\triangle))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^* f)\nu = 1
\end{aligned}
$$

  したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  □の分解式より，$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \in \alpha^*$.
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle) &= C(a\triangle) \\
&= C(a) \\
&< C(a) + 1 \\
&= C(a^{\square}) \\
&= C(a^{\square}\triangle) \\
&= C(s\,\breve{o}\pi\, a^{\square}\triangle) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

  が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 1$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 1 &\iff (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu \ni (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu^{\square} \not\ni (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a)\nu^{\square})\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\, \breve{o}\pi\, (\Phi^* a)\nu^{\square}\triangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\, \breve{o}\pi\, a^{\square}\triangle))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(vi) $f = s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcap a_2)\triangle$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\sqcap$ の分解式より，$s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle \in \alpha^*$ かつ $s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle \in \alpha^*$
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle) &= C(a_1\triangle) \\
&= C(a_1) \\
&< C(a_1) + C(a_2) + 1 \\
&= C(a_1 \sqcap a_2) \\
&= C((a_1 \sqcap a_2)\triangle) \\
&= C(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcap a_2)\triangle) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

  が成り立ち，$s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle$ についても同様なので，帰納法の仮定から，
  $(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle))\nu = 1$ かつ $(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle))\nu = 1$.

$$
\begin{aligned}
&(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle))\nu = 1 \text{ かつ } (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a_1)\nu\triangle = 1 \text{ かつ } (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a_2)\nu\triangle = 1 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a_1)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1 \text{ かつ } ((\Phi^* a_2)\nu\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a_1)\nu \ni (\Phi^* s)\nu \text{ かつ } (\Phi^* a_2)\nu \ni (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a_1)\nu \sqcap (\Phi^* a_2)\nu) \ni (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a_1)\nu \sqcap (\Phi^* a_2)\nu)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* a_1)\nu \sqcap (\Phi^* a_2)\nu)\triangle = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcap a_2)\triangle))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 1
\end{aligned}
$$

  したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $\sqcap$ の分解式より，$s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle \in \beta^*$ または $s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle \in \beta^*$
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle) &= C(a_1\triangle) \\
&= C(a_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&< C(a_1) + C(a_2) + 1 \\
&= C(a_1 \sqcap a_2) \\
&= C((a_1 \sqcap a_2)\triangle) \\
&= C(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcap a_2)\triangle) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle$ についても同様なので，帰納法の仮定から，
$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle))v = 0$ または $(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle))v = 0$.

$$
\begin{aligned}
&(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_1\triangle))v = 0 \text{ または } (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,a_2\triangle))v = 0 \\
&\iff (\Phi^*s)v\,\breve{o}\pi\,(\Phi^*a_1)v\triangle = 0 \text{ または } (\Phi^*s)v\,\breve{o}\pi\,(\Phi^*a_2)v\triangle = 0 \\
&\iff ((\Phi^*a_1)v\triangle)(\pi/(\Phi^*s)v) = 0 \text{ または } ((\Phi^*a_2)v\triangle)(\pi/(\Phi^*s)v) = 0 \\
&\iff (\Phi^*a_1)v \nexists (\Phi^*s)v \text{ または } (\Phi^*a_2)v \nexists (\Phi^*s)v \\
&\iff ((\Phi^*a_1)v \sqcap (\Phi^*a_2)v) \nexists (\Phi^*s)v \\
&\iff (((\Phi^*a_1)v \sqcap (\Phi^*a_2)v)\triangle)(\pi/(\Phi^*s)v) = 0 \\
&\iff (\Phi^*s)v\,\breve{o}\pi\,((\Phi^*a_1)v \sqcap (\Phi^*a_2)v)\triangle = 0 \\
&\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcap a_2)\triangle))v = 0 \\
&\iff (\Phi^*f)v = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^*f)v = 0$ である．

(vii) $f = s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcup a_2)\triangle$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\sqcup$ の分解式より，$s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}\triangle \in \alpha^*$.
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}\triangle) &= C((a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}\triangle) \\
&= C((a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}) \\
&= C(a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square}) + 1 \\
&= C(a_1^{\square}) + C(a_2^{\square}) + 2 \\
&= C(a_1) + C(a_2) + 4 \\
&< C(a_1) + C(a_2) + 5 \\
&= C(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcup a_2)\triangle) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}\triangle))v = 1$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\square} \sqcap a_2^{\square})^{\square}\triangle))v = 1 &\iff (\Phi^*s)v\,\breve{o}\pi\,((\Phi^*a_1)v^{\square} \sqcap (\Phi^*a_2)v^{\square})^{\square}\triangle = 1 \\
&\iff (((\Phi^*a_1)v^{\square} \sqcap (\Phi^*a_2)v^{\square})^{\square}\triangle)(\pi/(\Phi^*s)v) = 1 \\
&\iff ((\Phi^*a_1)v^{\square} \sqcap (\Phi^*a_2)v^{\square})^{\square} \exists (\Phi^*s)v \\
&\iff ((\Phi^*a_1)v^{\square} \sqcap (\Phi^*a_2)v^{\square}) \nexists (\Phi^*s)v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a_1)\nu^{\Box} \nexists (\Phi^* s)\nu \text{ または } (\Phi^* a_2)\nu^{\Box} \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a_1)\nu \exists (\Phi^* s)\nu \text{ または } (\Phi^* a_2)\nu \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a_1)\nu \sqcup (\Phi^* a_2)\nu) \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a_1)\nu \sqcup (\Phi^* a_2)\nu)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* a_1)\nu \sqcup (\Phi^* a_2)\nu)\triangle = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcup a_2)\triangle))\nu = 1 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 1
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $\sqcup$ の分解式より，$s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box})^{\Box}\triangle \in \beta^*$．
  ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box})^{\Box}\triangle) &= C((a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box})^{\Box}\triangle) \\
&= C((a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box})^{\Box}) \\
&= C(a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box}) + 1 \\
&= C(a_1^{\Box}) + C(a_2^{\Box}) + 2 \\
&= C(a_1) + C(a_2) + 4 \\
&< C(a_1) + C(a_2) + 5 \\
&= C(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcup a_2)\triangle) \\
&= C(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box})^{\Box}\triangle))\nu = 0$．

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1^{\Box} \sqcap a_2^{\Box})^{\Box}\triangle))\nu = 0 &\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* a_1)\nu^{\Box} \sqcap (\Phi^* a_2)\nu^{\Box})^{\Box}\triangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a_1)\nu^{\Box} \sqcap (\Phi^* a_2)\nu^{\Box})^{\Box}\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a_1)\nu^{\Box} \sqcap (\Phi^* a_2)\nu^{\Box})^{\Box} \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a_1)\nu^{\Box} \sqcap (\Phi^* a_2)\nu^{\Box}) \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a_1)\nu^{\Box} \exists (\Phi^* s)\nu \text{ かつ } (\Phi^* a_2)\nu^{\Box} \exists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* a_1)\nu \nexists (\Phi^* s)\nu \text{ かつ } (\Phi^* a_2)\nu \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow ((\Phi^* a_1)\nu \sqcup (\Phi^* a_2)\nu) \nexists (\Phi^* s)\nu \\
&\Longleftrightarrow (((\Phi^* a_1)\nu \sqcup (\Phi^* a_2)\nu)\triangle)(\pi/(\Phi^* s)\nu) = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,((\Phi^* a_1)\nu \sqcup (\Phi^* a_2)\nu)\triangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(a_1 \sqcup a_2)\triangle))\nu = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(viii) $f = s\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x)\triangle$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  Ωx の分解式より，$g(x/s) \in \alpha^*$．

ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned} C(g(x/s)) &= C(g) \qquad （補題 3.6 より） \\ &< C(g)+1 \\ &= C(g\,\Omega x) \\ &= C((g\,\Omega x)\triangle) \\ &= C(s\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x)\triangle) \\ &= C(f) \end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(g(x/s)))v = 1$.

$$\begin{aligned} (\Phi^*(g(x/s)))v = 1 &\iff (\Phi^* g)((x/(\Phi^* s)v)v) = 1 \qquad （代入値換定理より） \\ &\iff ((\Phi^* g)\,\Omega x)v \ni (\Phi^* s)v \\ &\iff (\Phi^*(g\,\Omega x))v \ni (\Phi^* s)v \\ &\iff ((\Phi^*(g\,\Omega x))v\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 1 \\ &\iff (\Phi^* s)v\,\breve{o}\pi\,(\Phi^*(g\,\Omega x))v\triangle = 1 \\ &\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x)\triangle))v = 1 \\ &\iff (\Phi^* f)v = 1 \end{aligned}$$

したがって，$(\Phi^* f)v = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  Ωx の分解式より，$g(x/s) \in \beta^*$.
  ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned} C(g(x/s)) &= C(g) \qquad （補題 3.6 より） \\ &< C(g)+1 \\ &= C(g\,\Omega x) \\ &= C((g\,\Omega x)\triangle) \\ &= C(s\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x)\triangle) \\ &= C(f) \end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(g(x/s)))v = 0$.

$$\begin{aligned} (\Phi^*(g(x/s)))v = 0 &\iff (\Phi^* g)((x/(\Phi^* s)v)v) = 0 \qquad （代入値換定理より） \\ &\iff ((\Phi^* g)\,\Omega x)v \not\ni (\Phi^* s)v \\ &\iff (\Phi^*(g\,\Omega x))v \not\ni (\Phi^* s)v \\ &\iff ((\Phi^*(g\,\Omega x))v\triangle)(\pi/(\Phi^* s)v) = 0 \\ &\iff (\Phi^* s)v\,\breve{o}\pi\,(\Phi^*(g\,\Omega x))v\triangle = 0 \\ &\iff (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\,(g\,\Omega x)\triangle))v = 0 \\ &\iff (\Phi^* f)v = 0 \end{aligned}$$

したがって，$(\Phi^* f)v = 0$ である．

(ix) $f = |a| > p$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| = p^*$ であれば，$p \in Q_0$ より $p^* > p$ である．
  したがって，$|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| > p$.
  ($|a| > \infty \to$ が MCL′ で証明可能なので，$|a| > \infty \notin \alpha^*$．すなわち，ここで $p \neq \infty$ である．)
  また，$|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| \leq p^*$ であれば，ある $b_1, \ldots, b_m \in A_\varepsilon \cup A_\delta$ が存在して，

$$\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Fb_j,\ |b_j| > q_j \in \beta^*,\ |(\Phi^* a)\nu| = \sum_{j=1}^{m} q_j$$

とできる．もし，$|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| \leq p$ とすると，$p \geq \sum_{j=1}^{m} q_j$ となるので，
$|a| > p$ の分解式より，ある $x \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が存在して，

$$x\,\breve{o}\pi\, a\triangle \in \alpha^*\ ,\ x\,\breve{o}\pi\, b_j\triangle \in \beta^* \quad (j = 1, \ldots, m).$$

ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(x\,\breve{o}\pi\, a\triangle) &= C(a\triangle) \\
&= C(a) \\
&< C(a) + 1 \\
&= C(one\,\overline{p}\pi\, a\triangle) \\
&= C(|a| > p \\
&= C(f)
\end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 1$.

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(x\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 1 &\iff (\Phi^* x)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\iff x\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\quad\text{（ここで命題 3.3 より，} \\
&\qquad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について，} (\Phi^* s)\nu = s \\
&\quad\text{となることを用いた.）} \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu\triangle)(\pi/x) = 1 \\
&\iff (\Phi^* a)\nu \exists x
\end{aligned}$$

したがって，$(\Phi^* a)\nu \exists x$ である．
一方，$x\,\breve{o}\pi\, b_j\triangle \in \beta^* \quad (j = 1, \ldots, m)$ より，$x \notin Fb_j \quad (j = 1, \ldots, m)$.
すなわち，$x \notin \bigcup_{j=1}^{m} Fb_j$．これより，$\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\} \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{m} Fb_j$ となって矛盾する．
ゆえに，$|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| \leq p$ ではありえないので，$|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| > p$.

$$\begin{aligned}
|\{s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| > p &\iff |\{s \in S \,|\, (\Phi^* one)\nu \exists s,\, (\Phi^* a)\nu \exists s\}| > p \\
&\iff (\Phi^* one)\nu\,\overline{p}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 1 \\
&\iff (\Phi^*(one\,\overline{p}\pi\, a\triangle))\nu = 1
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow (\Phi^*(|\,a\,| > p))\nu = 1$$
$$\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 1$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
$\forall s \in S$ をとる．$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \in \beta^*$ とすると，複雑度について，

$$\begin{aligned} C(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle) &= C(a\triangle) \\ &= C(a) \\ &< C(a) + 1 \\ &= C(one\,\overline{p}\pi\, a\triangle) \\ &= C(|\,a\,| > p) \\ &= C(f) \end{aligned}$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 0$.

$$\begin{aligned} (\Phi^*(s\,\breve{o}\pi\, a\triangle))\nu = 0 &\Longleftrightarrow (\Phi^* s)\nu\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow s\,\breve{o}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\ &\qquad (\text{ここで命題 3.3 より,} \\ &\qquad\qquad \forall s \in \mathrm{Prm}_\varepsilon \text{について}, (\Phi^* s)\nu = s \\ &\qquad \text{となることを用いた.}) \\ &\Longleftrightarrow ((\Phi^* a)\nu\triangle)(\pi/s) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\Phi^* a)\nu \not\ni s \end{aligned}$$

したがって，$(\Phi^* a)\nu \not\ni s$ である．今，$s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \in \beta^* \implies (\Phi^* a)\nu \not\ni s$ であることが示されたので，対偶をとると，$(\Phi^* a)\nu \ni s \implies s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \notin \beta^*$ が成り立つ．
集合について書き換えれば，$\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \ni s \,\} \subseteq \{\, s \in S \,|\, s\,\breve{o}\pi\, a\triangle \notin \beta^* \,\} = Fa$.
ここで，$|\,a\,| > p \in \beta^*$ であったことを思い出せば，
$|\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \ni s \,\}|$ の定義から，$|\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \ni s \,\}| \leq p$.

$$\begin{aligned} |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \ni s \,\}| \leq p &\Longleftrightarrow |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* one)\nu \ni s\,,\, (\Phi^* a)\nu \ni s \,\}| \leq p \\ &\Longleftrightarrow (\Phi^* one)\nu\,\overline{p}\pi\,(\Phi^* a)\nu\triangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\Phi^*(one\,\overline{p}\pi\, a\triangle))\nu = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\Phi^*(|\,a\,| > p))\nu = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\Phi^* f)\nu = 0 \end{aligned}$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(x) $f = \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\, g)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
$\overline{p}k$ の分解式より，$|\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\, g))\,\Omega x\,| > p \in \alpha^*$．ここで，複雑度について，

$$C(|\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\, g))\,\Omega x\,| > p) = C(one\,\overline{p}\pi\,(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\, g))\,\Omega x)\triangle)$$

$$= C(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x) + 1$$
$$= C(a) + C((\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x) + 2$$
$$= C(a) + C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g)) + 3$$
$$= C(a) + C(g) + 3$$
$$< C(a) + C(g) + 4$$
$$= C(a\,\overline{p}k\,g)$$
$$= C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g)$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(|\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x\,| > p))\nu = 1$.

$$(\Phi^*(|\,a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x\,| > p))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^*(one\,\overline{p}\pi\,(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x)\triangle))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^* one)\nu\,\overline{p}\pi\,(\Phi^*(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x))\nu\triangle = 1$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* one)\nu \,\exists\, s\,,\ ((\Phi^*(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x))\nu\triangle)(\pi/s) = 1\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, ((\Phi^*(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x))\nu \,\exists\, s\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, ((\Phi^* a)\nu \sqcap (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x)\nu) \,\exists\, s\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g)))\,\Omega x)\nu \,\exists\, s\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g)))((x/s)\nu) = 1\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^*(x\,\breve{o}k\,g))((x/s)\nu))\theta = 1\,\}| > p$$

（ここで, $\theta \in (P_g - \{k\} \to S)$ は,

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* x)((x/s)\nu)\,\breve{o}k\,(\Phi^* g)((x/s)\nu))\theta = 1\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, (s\,\breve{o}k\,(\Phi^* g)((x/s)\nu))\theta = 1\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* g)((x/s)\nu))((k/s)\theta) = 1\,\}| > p$$
$$\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)\nu \,\exists\, s, ((\Phi^* g)\nu)((k/s)\theta) = 1\,\}| > p$$

（ここで, x は g に自由に現れないので,

$$(\Phi^* g)\nu = (\Phi^* g)((x/s)\nu) \quad (\forall\, \nu \in \mathrm{Val})$$

が成り立つことを用いた.）

$$\iff ((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu)\theta = 1$$
$$\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu) = 1$$
$$\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\overline{p}k\,g))\cdots)))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}(a\,\overline{p}k\,g)))\nu = 1$$
$$\iff (\Phi^* f)\nu = 1$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 1$ である.

- $f \in \beta^*$ とする.

$\overline{\mathrm{p}}\mathrm{k}$ の分解式より，$|\, a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x\,| > p \in \beta^*$．ここで，複雑度について，

$$
\begin{aligned}
C(|\, a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x\,| > p) &= C(one\,\overline{p}\pi\,(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x)\triangle) \\
&= C(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x) + 1 \\
&= C(a) + C((\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x) + 2 \\
&= C(a) + C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g)) + 3 \\
&= C(a) + C(g) + 3 \\
&< C(a) + C(g) + 4 \\
&= C(a\,\overline{p}k\,g) \\
&= C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(|\, a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x\,| > p))\nu = 0$．

$$
\begin{aligned}
&(\Phi^*(|\, a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x\,| > p))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^*(one\,\overline{p}\pi\,(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x)\triangle))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^* one)\nu\,\overline{p}\pi\,(\Phi^*(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x))\nu\triangle = 0 \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* one)\nu \ni s\,,\ ((\Phi^*(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x))\nu\triangle)(\pi/s) = 1\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid ((\Phi^*(a \sqcap (\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x))\nu \ni s\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid ((\Phi^* a)\nu \sqcap (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g))\,\Omega x)\nu) \ni s\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g)))\,\Omega x)\nu \ni s\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(x\,\breve{o}k\,g)))((x/s)\nu) = 1\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^*(x\,\breve{o}k\,g))((x/s)\nu))\theta = 1\,\}| \le p \\
&\qquad \text{（ここで, } \theta \in (P_g - \{k\} \to S) \text{ は,} \\
&\qquad\qquad \theta k_i := (\Phi_i^s)\nu \quad (i = 1, \ldots, n) \\
&\qquad \text{と定義されているものとする.）} \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* x)((x/s)\nu)\,\breve{o}k\,(\Phi^* g)((x/s)\nu))\theta = 1\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, (s\,\breve{o}k\,(\Phi^* g)((x/s)\nu))\theta = 1\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* g)((x/s)\nu))((k/s)\theta) = 1\,\}| \le p \\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* g)\nu)((k/s)\theta) = 1\,\}| \le p \\
&\qquad \text{（ここで, } x \text{ は } g \text{ に自由に現れないので,} \\
&\qquad\qquad (\Phi^* g)\nu = (\Phi^* g)((x/s)\nu) \quad (\forall \nu \in \mathrm{Val}) \\
&\qquad \text{が成り立つことを用いた.）} \\
&\iff ((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu)\theta = 0 \\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu) = 0 \\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\overline{p}k\,g))\cdots)))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}(a\,\overline{p}k\,g)))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である．

(xi) $f = \vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\underline{p}k\,g)$ の場合

- $f \in \alpha^*$ とする．
  $\underline{p}k$ の分解式より，$\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond \in \alpha^*$．ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond) &= C((a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond)\\
&= C(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond) + 1\\
&= C(a) + C(g^\Diamond) + 5\\
&= C(a) + C(g) + 6\\
&< C(a) + C(g) + 7\\
&= C(a\,\underline{p}k\,g)\\
&= C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\underline{p}k\,g))\\
&= C(f)
\end{aligned}$$

  が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond))v = 1$．

$$\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond))v = 1 &\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond)\cdots)))v = 1\\
&\iff (\Phi^* s_1)v\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)v\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)v\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)v^\Diamond)^\Diamond)\cdots) = 1\\
&\iff (((\Phi^* a)v\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)v^\Diamond)^\Diamond)\theta = 1\\
&\qquad \text{（ここで，}\theta \in (P_g - \{k\} \to S)\text{ は，}\\
&\qquad\qquad \theta k_i := (\Phi^* s_i)v \quad (i = 1, \ldots, n)\\
&\qquad \text{と定義されているものとする．）}\\
&\iff ((\Phi^* a)v\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)v^\Diamond)\theta = 0\\
&\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)v\,\exists\, s, ((\Phi^* g)v)^\Diamond((k/s)\theta) = 1 \,\}| \le p\\
&\iff |\{\, s \in S \,|\, (\Phi^* a)v\,\exists\, s, ((\Phi^* g)v)((k/s)\theta) = 0 \,\}| \le p\\
&\iff ((\Phi^* a)v\,\underline{p}k\,(\Phi^* g)v)\theta = 1\\
&\iff (\Phi^* s_1)v\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)v\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)v\,\underline{p}k\,(\Phi^* g)v))\cdots) = 1\\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\underline{p}k\,f))\cdots)))v = 1\\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}(a\,\underline{p}k\,f)))v = 1\\
&\iff (\Phi^* f)v = 1
\end{aligned}$$

  したがって，$(\Phi^* f)v = 1$ である．

- $f \in \beta^*$ とする．
  $\underline{p}k$ の分解式より，$\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond \in \beta^*$．ここで，複雑度について，

$$\begin{aligned}
C(\vec{s}\,\breve{o}\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond) &= C((a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond)\\
&= C(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond) + 1\\
&= C(a) + C(g^\Diamond) + 5\\
&= C(a) + C(g) + 6\\
&< C(a) + C(g) + 7\\
&= C(a\,\underline{p}k\,g)
\end{aligned}$$

$$= C(\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(a\,\underline{p}k\,g))$$
$$= C(f)$$

が成り立つので，帰納法の仮定から，$(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond))\nu = 0$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond))\nu = 0 &\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\overline{p}k\,g^\Diamond)^\Diamond)\cdots)))\nu = 0\\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu^\Diamond)^\Diamond)\cdots) = 0\\
&\iff (((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu^\Diamond)^\Diamond)\theta = 0
\end{aligned}
$$

（ここで，$\theta(P_g - \{k\} \to S)$ は，

$$\theta k_i := (\Phi^* s_i)\nu \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義されているものとする.）

$$
\begin{aligned}
&\iff ((\Phi^* a)\nu\,\overline{p}k\,(\Phi^* g)\nu^\Diamond)\theta = 1\\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* g)\nu)^\Diamond((k/s)\theta) = 1 \,\}| > p\\
&\iff |\{\, s \in S \mid (\Phi^* a)\nu \ni s, ((\Phi^* g)\nu)((k/s)\theta) = 0 \,\}| > p\\
&\iff ((\Phi^* a)\nu\,\underline{p}k\,(\Phi^* g)\nu)\theta = 0\\
&\iff (\Phi^* s_1)\nu\,\breve{o}k\,(\cdots((\Phi^* s_n)\nu\,\breve{o}k\,((\Phi^* a)\nu\,\underline{p}k\,(\Phi^* g)\nu))\cdots) = 0\\
&\iff (\Phi^*(s_1\,\breve{o}k_1\,(\cdots(s_n\,\breve{o}k_n\,(a\,\underline{p}k\,f))\cdots)))\nu = 0\\
&\iff (\Phi^*(\vec{s}\,\breve{o}\,\vec{k}(a\,\underline{p}k\,f)))\nu = 0\\
&\iff (\Phi^* f)\nu = 0
\end{aligned}
$$

したがって，$(\Phi^* f)\nu = 0$ である.

以上で $C(f) > 0$ の全ての場合を尽くしているので，帰納法により補題の証明が完結した. □

補題 3.8
$\alpha_0 \to \beta_0$ は恒真式でない.

証明
補題 3.7 によれば,
$\alpha_0 \subseteq \alpha^*$ なので，$\forall f \in \alpha_0$ について，$(\Phi^* f)\nu = 1$.
すなわち，$\inf\{\, (\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha_0 \,\} = 1$.
$\beta_0 \subseteq \beta^*$ なので，$\forall g \in \beta_0$ について，$(\Phi^* g)\nu = 0$.
すなわち，$\sup\{\, (\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta_0 \,\} = 0$.
したがって，$\inf\{\, (\Phi^* f)\nu \mid f \in \alpha_0 \,\} > \sup\{\, (\Phi^* g)\nu \mid g \in \beta_0 \,\}$ である.
これは，$\alpha_0 \to \beta_0$ が恒真式でないということである. □

定理 3.1
狭義単相格言語 A の $\emptyset$ 型の元のみからなる恒真式は全て MCL′ で証明可能である.

証明
補題 3.8 より，$\emptyset$ 型の元のみからなる MCL′ で証明不可能な任意の式は恒真式ではないので，対偶をとれば定理の主張が成り立つことがわかる. □

定理 3.2 (MCL′ の完全性)
狭義単相格言語 A の $\emptyset$ 型の元のみからなる恒真式全体の集合と MCL′ で証明可能な式全体の集合は一致する．

証明
定理 2.1 と定理 3.1 より明らか． □

4　体系 MCL（一般の用元式への拡張）

ここでは，体系 MCL′ が $A_{\emptyset}$ の元のみからなる式だけを対象としてきたのを改善して，一般の式全体を扱うように拡張する．そして，この拡張された体系についても，第 2 節と第 3 節で示したような「健全性」と「完全性」が成り立つことを証明する．

4.1　新しい推論規則

論理体系 MCL′ にもう 1 つ推論規則を加える．

$$\text{(IR.15)}\quad \frac{x\,\breve{o}k\,f_1,\ldots,x\,\breve{o}k\,f_n,\ \alpha\to\beta\,,x\,\breve{o}k\,g_1,\ldots,x\,\breve{o}k\,g_m}{f_1,\ldots,f_n,\ \alpha\to\beta\,,g_1,\ldots,g_m}$$

ただし，x は下式に自由に現れない ε 型の変数とする．

注意 13
ここで，$\alpha\to\beta$ について α, $\beta \in \left(\bigcup_{P\in\mathcal{P}K} A_P\right)^*$ である.（$\emptyset$ 型の元のみからなる式である必要はない.）

定義 4.1
MCL′ に推論規則 (IR.15) を加えた体系を，MCL ということにする．

注意 14
推論規則 (IR.1)〜(IR.14) までは，$\emptyset$ 型の元のみからなる式についての推論規則ということで，特に変更はない．

MCL で証明可能な式を，MCL′ のときと同様に次で定義する．

定義 4.2 (MCL で証明可能な式)
(1) 公理 (AX.1)〜(AX.3) は MCL **で証明可能**な式である．

(2) 推論規則 (IR.1)〜(IR.15) について，
上式が全て MCL **で証明可能**な式ならば下式も MCL **で証明可能**な式である．

(3) (1)，(2) で得られるもののみが MCL **で証明可能**な式である．

命題 4.1
MCL′ で証明可能な式は MCL でも証明可能である．

証明
定義 1.2 の (2) を充たしていれば，定義 4.2 の (2) も充たすので明らか． □

定義 4.3 (健全性と完全性)
MCL で証明可能な式が全て恒真式であるとき，MCL は**健全である**ということにする．
さらに，恒真式が全て MCL で証明可能であるとき，MCL は**完全である**ということにする．

注意 15
定義 1.3 と同様，これは参考文献「数理心理学」での用語の定義と異なるが，この論文中での便宜的な用語であることを断っておく．

推論規則 (IR.15) についても次の補題が成り立つ．

補題 4.1
推論規則 (IR.15) **は健全である．すなわち，上式が恒真式であれば下式も恒真式である．**

証明
W を狭義単相格世界とし，Φ を任意の定付値，ν を任意の変付値，$\theta \in (K \to S)$ とする．
$\inf\{((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha\} = 0$ のときは下式は真である．
そこで，$\inf\{((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha\} = 1$，$((\Phi^* f_i)\nu)(\theta|_{P_{f_i}}) = 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$ とする．
ここで，x は α に自由に現れないので，$(\Phi^* f)\nu = (\Phi^* f)((x/\theta k)\nu) \quad (\forall f \in \alpha)$ が成り立つから，$\inf\{((\Phi^* f)((x/\theta k)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha\} = 1$ である．

$$
\begin{aligned}
&((\Phi^* f_i)\nu)(\theta|_{P_{f_i}}) = 1 \\
&\iff (\theta k\, \breve{o} k\, (\Phi^* f_i)\nu)(\theta|_{P_{f_i} - \{k\}}) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* x)((x/\theta k)\nu)\, \breve{o} k\, (\Phi^* f_i)\nu)(\theta|_{P_{f_i} - \{k\}}) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* x)((x/\theta k)\nu)\, \breve{o} k\, (\Phi^* f_i)((x/\theta k)\nu))(\theta|_{P_{f_i} - \{k\}}) = 1 \\
&\qquad (\text{ここで}, x \text{ は } f_i \text{に自由に現れないので}, \\
&\qquad\qquad (\Phi^* f_i)\nu = (\Phi^* f_i)((x/\theta k)\nu) \quad (\forall \nu \in \mathrm{Val}) \\
&\qquad \text{が成り立つことを用いた.}) \\
&\iff ((\Phi^*(x\, \breve{o} k\, f_i))((x/\theta k)\nu))(\theta|_{P_{f_i} - \{k\}}) = 1
\end{aligned}
$$

上式の恒真性から，$\sup\{((\Phi^* g)((x/\theta k)\nu))(\theta|_{P_g}) \mid g \in \beta\} = 1$ または，
ある $g_j \quad (j = 1, \ldots, m)$ について，$((\Phi^*(x\, \breve{o} k\, g_j))((x/\theta k)\nu))(\theta|_{P_{g_j} - \{k\}}) = 1$．
前者の場合，x は β に自由に現れないので，$(\Phi^* g)\nu = (\Phi^* g)((x/\theta k)\nu) \quad (\forall g \in \beta)$ が成り立つから，$\sup\{((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) \mid g \in \beta\} = 1$．
後者の場合，

$$
\begin{aligned}
&((\Phi^*(x\, \breve{o} k\, g_j))((x/\theta k)\nu))(\theta|_{P_{g_j} - \{k\}}) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* x)((x/\theta k)\nu)\, \breve{o} k\, (\Phi^* g_j)((x/\theta k)\nu))(\theta|_{P_{g_j} - \{k\}}) = 1 \\
&\qquad (\text{ここで}, x \text{ は } g_j \text{に自由に現れないので}, \\
&\qquad\qquad (\Phi^* g_j)\nu = (\Phi^* g_j)((x/\theta k)\nu) \quad (\forall \nu \in \mathrm{Val}) \\
&\qquad \text{が成り立つことを用いた.}) \\
&\iff ((\Phi^* x)((x/\theta k)\nu)\, \breve{o} k\, (\Phi^* g_j)\nu)(\theta|_{P_{g_j} - \{k\}}) = 1 \\
&\iff (\theta k\, \breve{o} k\, (\Phi^* g_j)\nu)(\theta|_{P_{g_j} - \{k\}}) = 1
\end{aligned}
$$

$$\iff ((\Phi^* g_j)\nu)(\theta|_{P_{g_j}}) = 1$$

どちらにせよ下式は恒真式である． □

4.2 MCL の健全性

拡張した体系 MCL についても，定理 2.1 と同様の定理が成り立つ．

定理 4.1 (MCL の健全性)
MCL で証明可能な式は全て恒真式である．

証明
定理 2.1 の証明と同様に，式 $\alpha \to \beta$ の証明のために推論規則の使われた回数 n に関する帰納法で示す．

(i) $n = 0$ のとき
$n = 0$，すなわち一度も推論規則を用いずに MCL で証明可能な式は公理に限られる．公理の場合は，補題 2.1 から恒真式であることがわかる．

(ii) $n > 0$ のとき
この場合，式 $\alpha \to \beta$ の証明の最後に用いた推論規則に注目する．この推論規則の上式は定義より全て MCL で証明可能であり，帰納法の仮定からそれらは恒真式である．そこで最後に用いた推論規則が (IR.1)〜(IR.14) の場合は補題 2.2 を，(IR.15) の場合は補題 4.1 を使えば，最後に用いた推論規則の下式は恒真式であることがわかる．すなわち，式 $\alpha \to \beta$ は恒真式である．

□

4.3 閉包式

第 3 節で定義した分解式に加えて，新しい推論式である「閉包式」を以下のように定義する．閉包式は格 $k \in K$ と，１対１の写像 $\varphi : K \to \mathrm{Var}_\varepsilon$ によってパラメータ付けられている．

(CL) (閉包式 (k, φ))

$$\frac{x_k\, \breve{o}k\, f_1, \ldots, x_k\, \breve{o}k\, f_n,\ \alpha \to \beta, x_k\, \breve{o}k\, g_1, \ldots, x_k\, \breve{o}k\, g_m}{f_1, \ldots, f_n,\ \alpha \to \beta, g_1, \ldots, g_m}$$

$$\text{ただし，} \begin{cases} \forall f \in \alpha \cup \beta \text{ に対して}, k \notin P_f \\ x_k := \varphi(k)\,,\ \varphi : K \overset{1:1}{\to} \mathrm{Var}_\varepsilon \end{cases}$$

補題 4.2
閉包式 (k, φ) について，x_k が下式に自由に現れないとする．このとき，上式が MCL で証明可能ならば下式も MCL で証明可能である．

証明
x_k が下式に自由に現れなければ，推論規則 (IR.15) によって上式から下式が導かれる． □

4.4 分解の実行

「恒真式は全て MCL で証明可能」ということを示すかわりに，その対偶である「MCL で証明不可能な式は恒真式でない」を示す．ここでは，第 3 節で α^*，β^* を定義したときの手順を少し変更する．

まず，MCL で証明不可能な任意の式 $\alpha_0 \to \beta_0$ を取る．(これは，$\emptyset$ 型の元のみからなる必要はない．) ここで，$\alpha_0 \cup \beta_0$ に自由に現れない ε 型の変数は有限個である．ε 型の変数は可算個あるので，任意の $k \in K$ に対して，それぞれ $\alpha_0 \cup \beta_0$ に自由に現れない変数 $x_k \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ を対応させる 1 対 1 の写像が存在する．そのような写像の 1 つを φ とする．

また，

$$P_{\alpha_0 \to \beta_0} := \bigcup_{f \in \alpha_0 \cup \beta_0} P_f$$

と定義すると，$P_{\alpha_0 \to \beta_0}$ は有限集合なので，$P_{\alpha_0 \to \beta_0} = \{k_0, \ldots, k_N\} \subseteq K$ と書くことができる．

これを踏まえて，MCL で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ を定義する．

定義 4.4
MCL で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ を次のように帰納的に定義する．

(i) $n = 0$ のとき
先程選んだ式 $\alpha_0 \to \beta_0$ を初項とする．$\alpha_0 \to \beta_0$ は定義から MCL で証明不可能である．

(ii) $1 \leq n < \sharp P_{\alpha_0 \to \beta_0}$ のとき
$\alpha_n \to \beta_n$ を下式とする閉包式 (k_n, φ) を作り，その上式を $\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ と定義する．
ここで，$x_{k_n} (= \varphi(k_n))$ は下式 $\alpha_n \to \beta_n$ に自由には現れない．なぜなら下式 $\alpha_n \to \beta_n$ に自由に現れる ε 型の変数は，$\alpha_0 \cup \beta_0$ に自由に現れるものか $\{x_{k_0}, \ldots, x_{k_{n-1}}\}$ のどれかでなくてはならないが，φ の定義と単射性より x_{k_n} についてはどちらもありえないからである．このことから，補題 4.2 によれば，閉包式 (k_n, φ) の上式が MCL で証明可能ならば下式も MCL で証明可能である．したがって，帰納的定義の仮定から $\alpha_n \to \beta_n$ は MCL で証明不可能な式なので，その上式，つまり $\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ も MCL で証明不可能である．

注意 16
閉包式 (k_N, φ) の上式は $\emptyset$ 型の元のみからなる式になっている．なぜならば，もし $P_f \neq \emptyset$ なる f が上式にあるとしたら，これまでに用いた閉包式 (k_i, φ) $(i = 0, \ldots, N)$ の性質により，ある $k \in P_f$ であって $k \notin \{k_0, \ldots, k_N\}$ となるものが存在することになる．しかし，これは $P_f \subseteq P_{\alpha_0 \to \beta_0} = \{k_0, \ldots, k_N\}$ に矛盾する．したがって，$\alpha_{N+1} \to \beta_{N+1}$ は $\emptyset$ 型の元のみからなる式であるので，ここから先は第 3 節での分解と同様に進められる．すなわち，$\emptyset$ 型の元のみからなる式しか出てこないということである．

(iii) $n \geq \sharp P_{\alpha_0 \to \beta_0}$ のとき
分解式 γ を n に応じて次のように決める．

$$\gamma := \begin{cases} \Diamond \text{の分解式} & n \equiv 0 \pmod{12} \\ \wedge \text{の分解式} & n \equiv 1 \pmod{12} \\ \vee \text{の分解式} & n \equiv 2 \pmod{12} \\ \Rightarrow \text{の分解式} & n \equiv 3 \pmod{12} \\ \square \text{の分解式} & n \equiv 4 \pmod{12} \\ \sqcap \text{の分解式} & n \equiv 5 \pmod{12} \\ \sqcup \text{の分解式} & n \equiv 6 \pmod{12} \\ \Omega x \text{の分解式} & n \equiv 7 \pmod{12} \\ |a| > p \text{の分解式} (n) & n \equiv 8 \pmod{12} \\ \overline{p}k \text{の分解式} & n \equiv 9 \pmod{12} \\ \underline{p}k \text{の分解式} & n \equiv 10 \pmod{12} \\ \breve{o}k \text{の分解式} & n \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

このもとで，$\alpha_n \to \beta_n$ を下式とする分解式 γ を作る．補題 3.1 によれば，分解式の上式が MCL′ で証明可能であれば下式も MCL′ で証明可能である．また，帰納的定義の仮定から $\alpha_n \to \beta_n$ が MCL で証明不可能なので，命題 4.1 より $\alpha_n \to \beta_n$ は MCL′ でも証明不可能である．したがって，分解式 γ の上式のうちの少なくとも 1 つは MCL′ で証明不可能でなくてはならない．その式を，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ と定義する．(厳密には選択公理が必要．)
ここで，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ が MCL では証明可能であるとしてみよう．MCL′ では証明不可能であり，MCL で証明可能ということは，推論規則 (IR.15) を用いて証明された以外にありえない．ところで，推論規則 (IR.15) の下式には少なくとも 1 つ $\emptyset$ 型でない元が含まれるので，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ は $\emptyset$ 型の元のみからなる式ではありえない．しかし注意 16 により，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ は $\emptyset$ 型の元のみからなる式であるので，これは矛盾である．したがって，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ は MCL で証明不可能である．

以上で MCL で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ が定義できたので，これを用いて，

$$\alpha^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n, \quad \beta^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

と定義する．ただし，$\bigcup_{n=0}^{\infty}$ は α_n，β_n をそれぞれ集合とみなしたときの和集合である．

注意 17
α^*，β^* には $\emptyset$ 型の元しか含まれない．これは，注意 16 にあるように，$\alpha_0 \to \beta_0$ が最初に閉包式を作っていく過程で $\emptyset$ 型の元のみからなる式に変形されてしまうことから従う．また命題4.1 より，MCL で証明不可能な式は MCL′ でも証明不可能であることから，以後は第 3 節で得られた結果をそのまま用いることができる．

以上で，α^* と β^* が定義できたので，第 3 節と同様にして狭義単相格世界 W と定付値 Φ，変付値 ν を定義する．定義の仕方は第 3 節と全く同じなので省略する．ただし，ここでは $\emptyset$ 型でない元も考えているので，付値以外に $\theta \in (K \to S)$ も必要になる．

定義 4.5 (θ の定義)
先程定義した φ によって，任意の格 $k \in K$ に対してある変数 $x_k = \varphi(k) \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が対応しているので，これを用いて，

$$\theta k := x_k \quad (\forall k \in K)$$

と定義する．$S = \mathrm{Prm}_\varepsilon$ なので，確かに $\theta \in (K \to S)$ となっている．

4.5 MCL の完全性

以上の準備のもとで，次の補題を示す.

補題 4.3
$f \in \alpha_0 \implies ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1$
$f \in \beta_0 \implies ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0$

証明
まず注意 17 を思い出せば，補題 3.7 はそのまま成り立つことがわかる．すなわち，
$\forall f \in A_\emptyset$ に対して，
$f \in \alpha^* \implies (\Phi^* f)\nu = 1$
$f \in \beta^* \implies (\Phi^* f)\nu = 0$
である．これを用いて，補題の主張を示す.

- $f \in \alpha_0$ とする．
  閉包式と $\breve{o}k$ の分解式により，$P_f = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とすれば，
  $x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, f) \cdots) \in \alpha^*$.
  補題 3.7 より，$(\Phi^*(x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, f) \cdots)))\nu = 1$.

$$\begin{aligned}
&(\Phi^*(x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, f) \cdots)))\nu = 1 \\
&\iff (\Phi^* x_{k_1})\nu\, \breve{o}k_1\, (\cdots ((\Phi^* x_{k_n})\nu\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 1 \\
&\iff x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 1 \\
&\iff \theta k_1\, \breve{o}k_1\, (\cdots (\theta k_n\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 1 \\
&\iff ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1
\end{aligned}$$

  したがって，$((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1$ である．

- $f \in \beta_0$ とする．
  閉包式と $\breve{o}k$ の分解式により，$P_f = \{k_1, \ldots, k_n\}$ とすれば，
  $x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, f) \cdots) \in \beta^*$.
  補題 3.7 より，$(\Phi^*(x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, f) \cdots)))\nu = 0$.

$$\begin{aligned}
&(\Phi^*(x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, f) \cdots)))\nu = 0 \\
&\iff (\Phi^* x_{k_1})\nu\, \breve{o}k_1\, (\cdots ((\Phi^* x_{k_n})\nu\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 0 \\
&\iff x_{k_1}\, \breve{o}k_1\, (\cdots (x_{k_n}\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 0 \\
&\iff \theta k_1\, \breve{o}k_1\, (\cdots (\theta k_n\, \breve{o}k_n\, (\Phi^* f)\nu) \cdots) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0$$

したがって，$((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0$ である．

□

補題 4.4
$\alpha_0 \rightarrow \beta_0$ は恒真式でない．

証明
補題 4.3 によれば，$\inf\{\,((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha_0\,\} = 1$ かつ $\sup\{\,((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) \mid g \in \beta_0\,\} = 0$.
したがって，$\inf\{\,((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha_0\,\} > \sup\{\,((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) \mid g \in \beta_0\,\}$ である．
これは，$\alpha_0 \rightarrow \beta_0$ が恒真式でないということである． □

定理 4.2
狭義単相格言語 A の恒真式は全て MCL で証明可能である．

証明
補題 4.4 より，MCL で証明不可能な任意の式は恒真式ではないので，対偶をとれば定理の主張が成り立つことがわかる． □

定理 4.3 (MCL の完全性)
狭義単相格言語 A の恒真式全体の集合と MCL で証明可能な式全体の集合は一致する．

証明
定理 4.1 と定理 4.2 より明らか． □

5 Cut Elimination（推論規則 (IR.2) に関して）

MCL では「Cut Elimination」，つまり証明能力の点では推論規則 (IR.2) が本質的には必要ないということが示される．

5.1 諸定義

定義 5.1
MCL から推論規則 (IR.2) のみを除いた体系を，MCL$''$ と呼ぶ．つまり，MCL$''$ は公理 (AX.1)〜(AX.3) と推論規則 (IR.1)，(IR.3)〜(IR.15) からなるような体系である．

定義 5.2 (MCL$''$ で証明可能な式)
(1) 公理 (AX.1)〜(AX.3) は MCL$''$ **で証明可能**な式である．

(2) 推論規則 (IR.1)，(IR.3)〜(IR.15) について，
上式が全て MCL$''$ **で証明可能**な式ならば下式も MCL$''$ **で証明可能**な式である．

(3) (1)，(2) で得られるもののみが MCL$''$ **で証明可能**な式である．

命題 5.1
MCL$''$ で証明可能な式は MCL でも証明可能である．

証明
定義 5.2 の (2) を充たしていれば，定義 4.2 の (2) も充たすので明らか． □

補題 5.1
分解式 (DR.1)〜(DR.12) のそれぞれについて，上式が全て MCL'' で証明可能であれば下式も MCL'' で証明可能である．

証明
補題 3.1 の証明において，各分解式について上式から下式を導くときに推論規則 (IR.2) は用いないことが確認できる．例えば $\Diamond$ の分解式ならば，上式に推論規則 (IR.3) を何回か用いてから推論規則 (IR.1) を使うことで，下式が導ける． □

補題 5.2
閉包式 (k, φ) について，x_k が下式に自由に現れないとする．このとき，上式が MCL'' で証明可能ならば下式も MCL'' で証明可能である．

証明
x_k が下式に自由に現れなければ，推論規則 (IR.15) によって上式から下式が導かれる． □

5.2 MCL'' の完全性

第 4 節での議論の「MCL で証明不可能」という部分を,「MCL'' で証明不可能」と言い換えることで，MCL'' の完全性が示される．

まず，MCL'' で証明不可能な任意の式 $\alpha_0 \to \beta_0$ を取る．ここで，$\alpha_0 \cup \beta_0$ に自由に現れない ε 型の変数は有限個である．ε 型の変数は可算個あるので，任意の $k \in K$ に対して，それぞれ $\alpha_0 \cup \beta_0$ に自由に現れない変数 $x_k \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ を対応させる 1 対 1 の写像が存在する．そのような写像の 1 つを φ とする．

また，

$$P_{\alpha_0 \to \beta_0} := \bigcup_{f \in \alpha_0 \cup \beta_0} P_f$$

と定義すると，$P_{\alpha_0 \to \beta_0}$ は有限集合なので，$P_{\alpha_0 \to \beta_0} = \{k_0, \ldots, k_N\} \subseteq K$ と書くことができる．

これを踏まえて，MCL'' で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ を定義する．

定義 5.3
MCL'' で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ を次のように帰納的に定義する．

(i) $n = 0$ のとき
先程選んだ式 $\alpha_0 \to \beta_0$ を初項とする．$\alpha_0 \to \beta_0$ は定義から MCL'' で証明不可能である．

(ii) $1 \leq n < \sharp P_{\alpha_0 \to \beta_0}$ のとき
$\alpha_n \to \beta_n$ を下式とする閉包式 (k_n, φ) を作り，その上式を $\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ と定義する．
ここで，$x_{k_n} (= \varphi(k_n))$ は下式 $\alpha_n \to \beta_n$ に自由には現れない．なぜなら下式 $\alpha_n \to \beta_n$ に自由に現れる ε 型の変数は，$\alpha_0 \cup \beta_0$ に自由に現れるものか $\{x_{k_0}, \ldots, x_{k_{n-1}}\}$ のどれかでなくてはならないが，φ の定義と単射性より x_{k_n} についてはどちらもありえないからである．
このことから，補題 5.2 によれば，閉包式 (k_n, φ) の上式が MCL'' で証明可能ならば下式も MCL'' で証明可能である．したがって，帰納的定義の仮定から $\alpha_n \to \beta_n$ は MCL'' で証明不可能な式なので，その上式，つまり $\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ も MCL'' で証明不可能である．

注意 18
閉包式 (k_N, φ) の上式は $\emptyset$ 型の元のみからなる式になっている．なぜならば，もし $P_f \neq \emptyset$ なる f が上式にあるとしたら，これまでに用いた閉包式 (k_i, φ) $(i = 0, \ldots, N)$ の性質により，ある $k \in P_f$ であって $k \notin \{k_0, \ldots, k_N\}$ となるものが存在することになる．しかし，これは $P_f \subseteq P_{\alpha_0 \to \beta_0} = \{k_0, \ldots, k_N\}$ に矛盾する．したがって，$\alpha_{N+1} \to \beta_{N+1}$ は $\emptyset$ 型の元のみからなる式であるので，ここから先は第 3 節での分解と同様に進められる．すなわち，$\emptyset$ 型の元のみからなる式しか出てこないということである．

(iii) $n \geq \sharp P_{\alpha_0 \to \beta_0}$ のとき
分解式 γ を n に応じて次のように決める．

$$\gamma := \begin{cases} \Diamond\text{の分解式} & n \equiv 0 \pmod{12} \\ \wedge\text{の分解式} & n \equiv 1 \pmod{12} \\ \vee\text{の分解式} & n \equiv 2 \pmod{12} \\ \Rightarrow\text{の分解式} & n \equiv 3 \pmod{12} \\ \square\text{の分解式} & n \equiv 4 \pmod{12} \\ \sqcap\text{の分解式} & n \equiv 5 \pmod{12} \\ \sqcup\text{の分解式} & n \equiv 6 \pmod{12} \\ \Omega x\text{の分解式} & n \equiv 7 \pmod{12} \\ |a| > p\text{の分解式}\,(n) & n \equiv 8 \pmod{12} \\ \overline{p}k\text{の分解式} & n \equiv 9 \pmod{12} \\ \underline{p}k\text{の分解式} & n \equiv 10 \pmod{12} \\ \breve{o}k\text{の分解式} & n \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

このもとで，$\alpha_n \to \beta_n$ を下式とする分解式 γ を作る．補題 5.1 によれば，分解式の上式が MCL$''$ で証明可能であれば下式も MCL$''$ で証明可能である．したがって，帰納的定義の仮定から $\alpha_n \to \beta_n$ が MCL$''$ で証明不可能なので，分解式 γ の上式のうちの少なくとも 1 つは MCL$''$ で証明不可能でなくてはならない．その式を，$\alpha_{n+1} \to \beta_{n+1}$ と定義する．（厳密には選択公理が必要.）

以上で MCL$''$ で証明不可能な式の列 $(\alpha_n \to \beta_n)_{n=0}^{\infty}$ が定義できたので，これを用いて，

$$\alpha^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n\,, \quad \beta^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \beta_n$$

と定義する．ただし，$\bigcup_{n=0}^{\infty}$ は α_n，β_n をそれぞれ集合とみなしたときの和集合である．

以上で，α^* と β^* が定義できたので，第 3 節と同様にして狭義単相格世界 W と定付値 Φ，変付値 ν を定義する．定義の仕方は第 3 節と全く同じなので省略する．

定義 5.4 (θ の定義)
先程定義した φ によって，任意の格 $k \in K$ に対してある変数 $x_k = \varphi(k) \in \mathrm{Var}_\varepsilon$ が対応しているので，これを用いて，

$$\theta k := x_k \quad (\forall\, k \in K)$$

と定義する．$S = \mathrm{Prm}_\varepsilon$ なので，確かに $\theta \in (K \to S)$ となっている．

以上の準備のもとで，第 4 節と同様に次の補題が成り立つ．

補題 5.3
$f \in \alpha_0 \implies ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 1$
$f \in \beta_0 \implies ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) = 0$

証明
まず，補題 3.7 の証明には推論規則 (IR.2) は使われていないので，補題 3.7 はそのまま成り立つことがわかる．したがって，補題 4.3 の証明を全く変更なしで使うことができる． □

さらに第 4 節と同様に，以下の補題と定理が成り立つ．

補題 5.4
$\alpha_0 \rightarrow \beta_0$ **は恒真式でない．**

証明
補題 5.3 によれば，$\inf\{\, ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha_0 \,\} = 1$ かつ $\sup\{\, ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) \mid g \in \beta_0 \,\} = 0$.
したがって，$\inf\{\, ((\Phi^* f)\nu)(\theta|_{P_f}) \mid f \in \alpha_0 \,\} > \sup\{\, ((\Phi^* g)\nu)(\theta|_{P_g}) \mid g \in \beta_0 \,\}$ である．
これは，$\alpha_0 \rightarrow \beta_0$ が恒真式でないということである． □

定理 5.1
狭義単相格言語 A の恒真式は全て MCL″ で証明可能である．

証明
補題 5.4 より，MCL″ で証明不可能な任意の式は恒真式ではないので，対偶をとれば定理の主張が成り立つことがわかる． □

定理 5.2 (MCL″ の完全性)
狭義単相格言語 A の恒真式全体の集合と MCL″ で証明可能な式全体の集合は一致する．

証明
命題 5.1 と定理 4.1 から，MCL″ で証明可能な式は全て恒真式であることがわかる．逆は定理 5.1 より明らか． □

5.3 Cut Elimination

定理 5.3 (Cut Elimination)
MCL で証明可能な式全体の集合と MCL″ で証明可能な式全体の集合は一致する．

注意 19
一般の論理体系において，推論規則 (IR.2) にあたる規則のことを「Cut」と呼ぶことが多い．したがって，証明から「Cut」を除去 (eliminate) できるという意味で，この種の定理は「Cut Elimination」と呼ばれている．

証明
定理 4.3 より MCL は完全なので，MCL で証明可能な式全体の集合は狭義単相格言語 A の恒真式全体の集合と一致する．一方，定理 5.2 により MCL″ も完全なので，狭義単相格言語 A の恒真式全体の集合は MCL″ で証明可能な式全体の集合と一致する．したがって，MCL で証明可能な式全体の集合は MCL″ で証明可能な式全体の集合と一致する． □

参考文献

[1] 五味 健作 「数理心理学 ―思考機械・論理・言語・代数系―」
（http://village.infoweb.or.jp/~gomiken/ で入手可能）

[2] 難波 完爾 「集合論」（サイエンス社）